Nom : **Prénom** : **Classe** : T[le]OME

le 13 / 10 / 2020

Note :

INTERROGATION de MATHÉMATIQUES

Durée : 35 minutes. Calculatrice **AUTORISÉE en mode examen**.

EXERCICE 1 ≈ 5 minutes

On considère la matrice suivante : $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

On admet que $A^2=2I_3-A$ où I_3 est la matrice identité d'ordre 3.

Démontrer que A est inversible et déterminer l'inverse de A, noté A^{-1}.

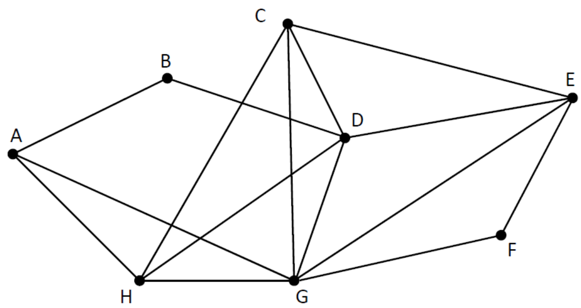
EXERCICE 2 ≈ 5 minutes

À l'aide du calcul matriciel, résoudre le système suivant : $\begin{cases}-3x-2z=1+3y\\ -x+2y+3z=-2\\ 4x-2y=3z\end{cases}$.

EXERCICE 3 ≈ 5 minutes

On considère le graphe non orienté suivant.

Comment pourrions-nous déterminer le nombre de chaînes de longueur 8 reliant les sommets A et F ? (expliquer rapidement)



EXERCICE 4 ≈ 15 minutes

D'après Baccalauréat S (Antilles-Guyane, 2014).

Dans une ville, une enseigne de banque nationale possède deux agences, appelées X et Y.
D'une année sur l'autre, une partie des fonds de l'agence X est transférée à l'agence Y, et réciproquement.
De plus, chaque année, le siège de la banque transfère une certaine somme à chaque agence.

Soit n un entier naturel. On note x_n la quantité de fonds détenue par l'agence X, et y_n la quantité de fonds détenue par l'agence Y au 1[er] janvier de l'année $2014+n$, exprimées en millions d'euros.

On note U_n la matrice $\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$ et on note $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

On suppose que le 1[er] janvier de l'année 2014, l'agence X possède 50 millions d'euros et l'agence Y possède 10 millions d'euros.

L'évolution de la quantité de fonds est régie par la relation suivante : $\begin{cases}x_{n+1}=0,6x_n+0,15y_n+1\\ y_{n+1}=0,2x_n+0,4y_n+3\end{cases}$.

Autrement dit : $U_{n+1} = A\,U_n + B$, où $A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. On note C la matrice colonne telle que $C = AC + B$, et on pose, pour tout entier naturel n : $V_n = U_n - C$.
Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} = AV_n$.

2. On note $D = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}7 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & -0{,}375 \\ 0{,}25 & 0{,}125 \end{pmatrix}$. On admet que : $A = PDP^{-1}$.

Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $A^n = PD^nP^{-1}$.

3. On admet que :
- $\forall\, n \in \mathbb{N},\ V_n = A^n V_0$.
- $\forall\, n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 0{,}25 \times 0{,}3^n + 0{,}75 \times 0{,}7^n & 0{,}375(-0{,}3^n + 0{,}7^n) \\ 0{,}5(-0{,}3^n + 0{,}7^n) & 0{,}75 \times 0{,}3^n + 0{,}25 \times 0{,}7^n \end{pmatrix}$.

En calculant le coefficient de la première ligne de la matrice V_n, déterminer l'expression de x_n en fonction de n.