On se propose d'étudier une modélisation d'une tour de contrôle de trafic aérien, chargée de surveiller deux routes aériennes représentées par deux droites de l'espace.

L'espace est rapporté à un repère $(O\,;\,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ représente le sol. Les deux « routes aériennes » à contrôler sont représentées par deux droites (d_1) et (d_2). Les droites (d_1) et (d_2) passent respectivement par les points A(3 ; 9 ; 2) et $B\left(\frac{1}{2}\,;4\,;4\right)$ et sont dirigées respectivement par les vecteurs $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{u_2}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. a. Indiquer les coordonnées d'un point A' de (d_1) distinct de A.

b. Indiquer les coordonnées d'un point B' de (d_2) distinct de B.

2. Prouver que les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas coplanaires.

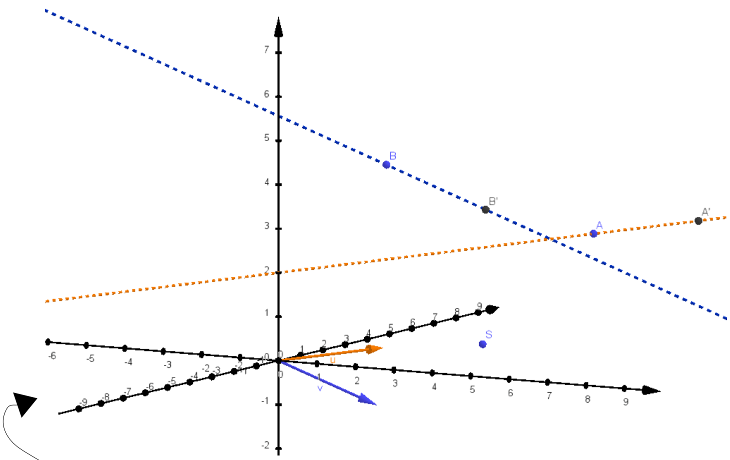
3. On veut installer au sommet S de la tour de contrôle, de coordonnées $S\left(3\,;4\,;\frac{1}{10}\right)$, un appareil de surveillance qui émet un rayon représenté par une droite notée (r). Soit $\mathscr{P}_1$ le plan contenant S et (d_1), et soit $\mathscr{P}_2$ le plan contenant S et (d_2).

a. Montrer que la droite (d_2) est sécante au plan $\mathscr{P}_1$.

b. Montrer que la droite (d_1) est sécante au plan $\mathscr{P}_2$.

c. Un technicien affirme qu'il est possible de choisir la direction de (r) pour que cette droite coupe chacune des droites (d_1) et (d_2). Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.

Sujet adapté, Bac S, Centres étrangers, juin 2000.



Cliquer sur l'image pour télécharger le fichier Geogebra.

1. a. $A'(3+1\,;9+3\,;2+0)$ *ie* $A'(4\,;12\,;2)$.

b. $B'\left(\frac{1}{2}+2\,;4+1\,;4-1\right)$ *ie* $B'\left(\frac{5}{2}\,;5\,;3\right)$.

2. Si (d_1) et (d_2) sont coplanaires :
alors A, A', B et B' sont coplanaires
donc : $\exists\ (\lambda\,;\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{AA'}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AB'}$

$$\text{donc : }\begin{cases}4-3 &= \lambda\left(\frac{1}{2}-3\right)+\mu\left(\frac{5}{2}-3\right)\\ 12-9 &= \lambda(4-9)+\mu(5-9)\\ 2-2 &= \lambda(4-2)+\mu(3-2)\end{cases}$$

$$\text{donc }\begin{cases}1 &= -\frac{5}{2}\lambda-\frac{1}{2}\mu\\ 3 &= -5\lambda-4\mu\\ 0 &= 2\lambda+\mu\end{cases}\quad\begin{cases}1 &= -\frac{5}{2}\lambda-\frac{1}{2}\times(-2\lambda)\\ 3 &= -5\lambda-4\times(-2\lambda)\\ \mu &= -2\lambda\end{cases}\quad\begin{cases}1 &= -\frac{3}{2}\lambda\\ 3 &= 3\lambda\\ \mu &= -2\lambda\end{cases}\quad\begin{cases}-\frac{2}{3} &= \lambda\\ 1 &= \lambda\\ \mu &= -2\lambda\end{cases}.$$

Or, ceci est impossible (contradiction).
Conclusion : (d_1) et (d_2) ne sont pas coplanaires.

3. a. MÉTHODE 1

- Par construction, les points S, A et A' appartiennent au plan $\mathscr{P}_1$.
- $\overrightarrow{SA}\left(3-3\,;9-4\,;2-\frac{1}{10}\right)$ *ie* $\overrightarrow{SA}\left(0\,;5\,;\frac{19}{10}\right)$.

$\overrightarrow{AA'}(4-3\,;12-9\,;2-2)$ *ie* $\overrightarrow{AA'}(1\,;3\,;0)$.

$\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{AA'}$ ne sont donc évidemment pas colinéaires et forment une base du plan $\mathscr{P}_1$.

- (d_2) est dirigée par $\vec{u_2}$.
- Si $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{AA'}$ et $\vec{u_2}$ sont coplanaires, alors : $\exists\ (\lambda\,;\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{SA}=\lambda\overrightarrow{AA'}+\mu\vec{u_2}$

d'où : $\begin{cases} 0 = \lambda + 2\mu \\ 5 = 3\lambda + \mu \\ \dfrac{19}{10} = -\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -2\times\left(-\dfrac{19}{10}\right) \\ \lambda = \dfrac{5+\dfrac{19}{10}}{3} \\ -\dfrac{19}{10} = \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{19}{5} \\ \lambda = \dfrac{34}{3} \end{cases}$

ce qui est impossible (contradiction).

• Conclusion : $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{AA'}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas coplanaires, et par conséquent (d_2) et $\mathscr{P}_1$ sont sécants.

MÉTHODE 2 (rappel : **ssi** signifie « si, et seulement si » et correspond à un équivalent)

$\overrightarrow{SA}\left(3-3;9-4;2-\dfrac{1}{10}\right)$ *ie* $\overrightarrow{SA}\left(0;5;\dfrac{19}{10}\right)$.

$\overrightarrow{AA'}(4-3;12-9;2-2)$ *ie* $\overrightarrow{AA'}(1;3;0)$.

$\overrightarrow{BB'}\left(\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2};5-4;3-4\right)$ *ie* $\overrightarrow{BB'}(2;1;-1)$.

(d_2) et $\mathscr{P}_1$ sont sécants en un point M **ssi** $\exists\ (k;\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{BM}=k\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{SM}=\lambda\overrightarrow{SA}+\mu\overrightarrow{AA'}$

ssi $\exists\ (k;\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^3$, $M(x;y;z)$ et $\begin{cases} x-\dfrac{1}{2} = 2k \\ y-4 = k \\ z-4 = -k \end{cases}$ et $\begin{cases} x-3 = \mu \\ y-4 = 5\lambda+3\mu \\ z-\dfrac{1}{10} = \dfrac{19}{10}\lambda \end{cases}$

ssi $\exists\ (k;\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^3$, $M(x;y;z)$ et $\begin{cases} x = 2k+\dfrac{1}{2} \\ y = k+4 \\ z = -k+4 \end{cases}$ et $\begin{cases} 2k+\dfrac{1}{2}-3 = \mu \\ k+4-4 = 5\lambda+3\mu \\ -k+4-\dfrac{1}{10} = \dfrac{19}{10}\lambda \end{cases}$

ssi $\exists\ (k;\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^3$, $M(x;y;z)$ et $\begin{cases} x = 2k+\dfrac{1}{2} \\ y = k+4 \\ z = -k+4 \end{cases}$ et $\begin{cases} 2k-\dfrac{5}{2} = \mu \\ k = 5\lambda+3\mu \\ \dfrac{10}{19}\left(-k+\dfrac{39}{10}\right) = \lambda \end{cases}$

ssi $\exists\ (k;\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^3$, $M(x;y;z)$ et $\begin{cases} x = 2k+\dfrac{1}{2} \\ y = k+4 \\ z = -k+4 \end{cases}$ et $\begin{cases} 2k-\dfrac{5}{2} = \mu \\ k = 5\left(\dfrac{10}{19}\left(-k+\dfrac{39}{10}\right)\right)+3\left(2k-\dfrac{5}{2}\right) \\ \dfrac{10}{19}\left(-k+\dfrac{39}{10}\right) = \lambda \end{cases}$

Ce dernier système a nécessairement une solution, donc (d_2) et $\mathscr{P}_1$ sont sécants en un point M.

Remarque : en continuant, on trouverait $k=-\dfrac{7}{6}$ et donc $\mu=-\dfrac{29}{6}$, $\lambda=\dfrac{8}{3}$, $x=-\dfrac{11}{6}$, $y=\dfrac{17}{6}$, $z=\dfrac{31}{6}$.

Cela permet donc de déterminer les coordonnées du point d'intersection de (d_2) et $\mathscr{P}_1$: $\left(-\dfrac{11}{6};\dfrac{17}{6};\dfrac{31}{6}\right)$.

b. *On reprend ici la méthode 1 vue à la question précédente.*

• Par construction, les points S, B et B' appartiennent au plan $\mathscr{P}_2$.

• $\overrightarrow{SB}\left(3-3;9-4;2-\frac{1}{10}\right)$ *ie* $\overrightarrow{SB}\left(-\frac{5}{2};0;\frac{39}{10}\right)$.

$\overrightarrow{BB'}\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2};5-4;3-4\right)$ *ie* $\overrightarrow{BB'}(2;1;-1)$.

$\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{BB'}$ ne sont donc évidemment pas colinéaires et forment une base du plan $\mathscr{P}_2$.

• (d_1) est dirigée par $\vec{u_1}$.

• Si $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\vec{u_1}$ sont coplanaires, alors : $\exists\ (\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{SB}=\lambda\overrightarrow{BB'}+\mu\vec{u_1}$

d'où : $\begin{cases}-\frac{5}{2} = 2\lambda+\mu\\ 0 = \lambda+3\mu\\ \frac{39}{10} = -\lambda\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-\frac{5}{2} = 2\times\left(-\frac{39}{10}\right)+\mu\\ 0 = -\frac{39}{10}+3\mu\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-\frac{5}{2}+\frac{39}{5} = \mu\\ \mu = \frac{39}{10}\times\frac{1}{3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{53}{10} = \mu\\ \mu = \frac{13}{10}\end{cases}$

ce qui est impossible (contradiction).

• Conclusion : $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\vec{u_1}$ ne sont pas coplanaires, et par conséquent (d_1) et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

Remarque : avec la méthode 2, on trouverait en continuant les coordonnées du point d'intersection de (d_1) et $\mathscr{P}_2$: $\left(\frac{19}{16};\frac{57}{16};2\right)$.

c. • Si on a fait les méthodes 2, en nommant $I_1\left(-\frac{11}{6};\frac{17}{6};\frac{31}{6}\right)$ et $I_2\left(\frac{19}{16};\frac{57}{16};2\right)$ les points d'intersection déterminés précédemment, il suffit de vérifier que S, I_1 et I_2 sont alignés pour que : $(r)=(SI_1)=(SI_2)$.

Pour cela, on peut déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{SI_1}$ et $\overrightarrow{SI_2}$: *(à faire)*

$$\overrightarrow{SI_1}\left(-\frac{29}{6};-\frac{7}{6};\frac{76}{15}\right) \text{ et } \overrightarrow{SI_2}\left(-\frac{29}{16};-\frac{7}{16};\frac{19}{10}\right)$$

et il est alors facile de vérifier que $\overrightarrow{SI_1}=\frac{3}{8}\overrightarrow{SI_2}$.

• Avec les méthodes 1, on n'a pas les points d'intersection, donc il faut procéder autrement.

Par construction, les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ contiennent le point S : ces deux plans sont donc confondus ou sécants.

Or, ils ne sont pas confondus, puisque (d_1) et (d_2) sont deux droites non coplanaires (voir question 2) incluses respectivement dans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

Donc $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants en une droite passant par S, que l'on note (r).

Il reste à prouver que (r) coupe bien les droites (d_1) et (d_2).

On a vu à la question 3.a. que (d_2) est sécante avec $\mathscr{P}_1$. Ce point d'intersection I_1 appartenant à (d_2), et (d_2) étant incluse dans $\mathscr{P}_2$, alors il appartient aussi à $\mathscr{P}_2$.

De même, (d_1) est sécante avec $\mathscr{P}_2$. Ce point d'intersection I_2 appartenant à (d_1), et (d_1) étant incluse dans $\mathscr{P}_1$, alors il appartient aussi à $\mathscr{P}_1$.

Finalement, $(r)=(I_1I_2)$: (r) coupe bien les droites (d_1) et (d_2).