ÉVOLUTION : MODÈLES DISCRETS

Rappels de Première

Les suites : `1424` (FB) + `1425` (5 SF)
+ `vers-tomc#a1` (4 exos corrigés en vidéo & 13 exercices corrigés)

Les suites arithmétiques et géométriques :
`1426` (FB) + `1427` (5 SF) + `vers-tomc#a2` (2 exos corrigés en vidéo)

« Le plus grand service qu'on puisse rendre à un auteur est de lui interdire de travailler pendant un certain temps. Des tyrannies de courte durée seraient nécessaires, qui s'emploieraient à suspendre toute activité intellectuelle. La liberté d'expression sans interruption aucune expose les talents à un péril mortel, elle les oblige à se dépenser au-delà de leurs ressources et les empêche de stocker des sensations et des expériences.
La liberté sans ***limites*** *est un attentat contre l'esprit. »*

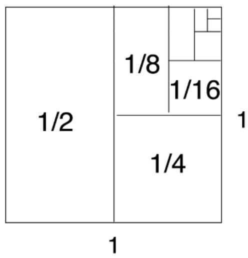
Emil Cioran, De l'inconvénient d'être né (1973)

Questions d'introduction

1. Notons S = 1+2+4+8+…

Alors 2S = 2+4+8+16+…
donc $2S-S = -1$ *ie* $S = -1$.
Donc : $1+2+4+8+\ldots=-1$.
Où est le problème ?

2. D'après ce dessin, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\ ?$



n	somme des 1/k de 1 à n
1	1,00
2	1,50
3	1,83
4	2,08
5	2,28
6	2,45
7	2,59
8	2,72
9	2,83
10	2,93
11	3,02
12	3,10
13	3,18
14	3,25
15	3,32

3. On trouve : $\sum_{k=1}^{1\,000}\frac{1}{k}\approx 7{,}4855$ $\sum_{k=1}^{10\,000}\frac{1}{k}\approx 9{,}7876$ $\sum_{k=1}^{50\,000}\frac{1}{k}\approx 11{,}3970$.

Il faut ajouter plus de 10^{43} termes[1] de la série pour que la somme dépasse 100.

À votre avis, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\ ?$

4. À votre avis, $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\ldots=\ ?$

5. À votre avis, $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}\ldots=\ ?$

1 Soit plus de dix millions de milliards de milliards de milliards de milliards de termes…
Le nombre exact de termes, calculé en 1968, est 15 092 688 622 113 788 323 693 563 264 538 101 449 859 497.

I. Limite d'une suite

I.1 Limite finie (convergence) et divergence

DÉFINITION

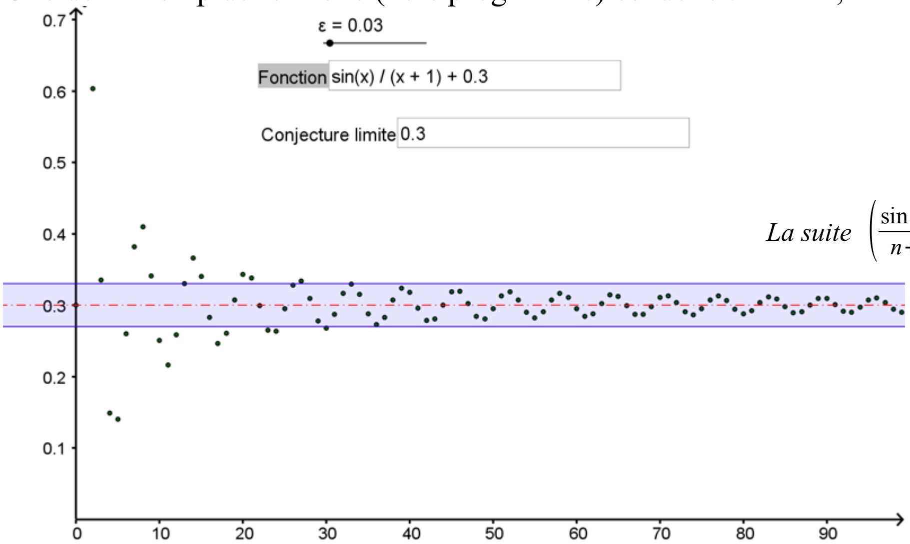
Une suite (u_n) admet pour limite le réel l si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.

On dit alors que (u_n) est ***convergente*** et converge vers l.

Notation : Si aucune confusion possible, on note aussi :

Remarque : un intervalle ouvert contenant l est de la forme

Une définition plus formelle (hors programme) est donc : $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow l-\varepsilon < u_n < l+\varepsilon$.



La suite $\left(\frac{\sin(n)}{n+1}+0{,}3\right)$ *semble converger vers 0,3.*

DÉFINITION

Une suite qui n'est pas convergente est dite ***divergente***.

EXEMPLE C1 La suite définie par $u_n=(-1)^n$ est divergente : elle n'admet pas de limite.

PROPRIÉTÉ (ADMISE)

Une suite convergente admet une limite unique.

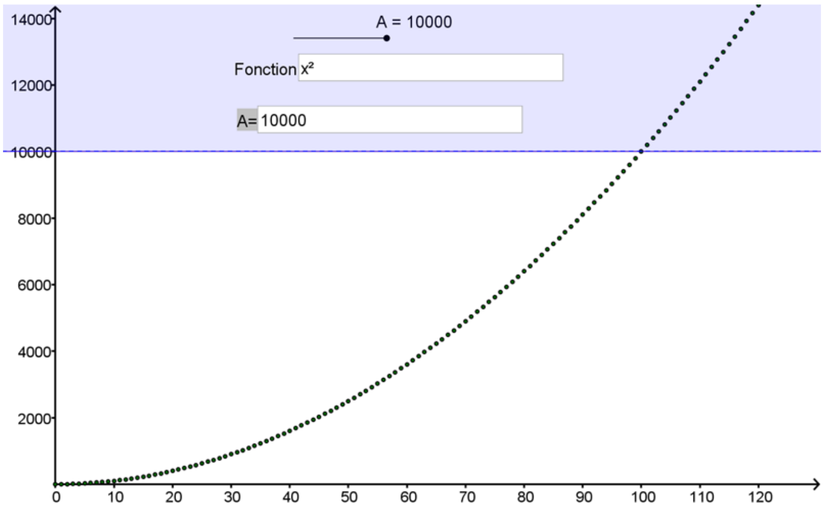
I.2 Limite infinie

DÉFINITION

Une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si

Notation : Si aucune confusion possible, on note aussi :

Une définition plus formelle (hors programme) est donc : $\forall A>0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow u_n > A$.



← *la suite* (n^2) *semble diverger vers* $+\infty$.

> **DÉFINITION**
>
> Une suite (u_n) tend vers $-\infty$ si $(-u_n)$ tend vers $+\infty$.
> Autrement dit, si **<u>tout</u>** intervalle $]-\infty ; A[$ contient **<u>tous</u>** les u_n à partir d'un certain rang.
>
> Notation : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

I.3 Alors c'est quoi la divergence ?

Par définition, une suite qui tend vers l'infini ne converge pas. Autrement dit elle diverge…
On dit donc par exemple qu'une suite **diverge vers** $+\infty$.
Mais alors « une suite divergente tend-elle nécessairement vers l'infini » ? Pas du tout !

Si une suite diverge, alors : - soit

- soit

II. Opérations sur les limites

II.1 Limite d'une somme

PROPRIÉTÉS (ADMISES)

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n + v_n =$						

II.2 Limite d'un produit

PROPRIÉTÉS (ADMISES)

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	l	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	0
et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n v_n =$						

II.3 Limite d'un quotient

PROPRIÉTÉS (ADMISES)

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$							

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	$l>0$ ou $+\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	0
et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$	0^+	0^-	0^+	0^-	0
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$					

Il y a donc quatre cas d'indétermination, qui sont, en utilisant un abus d'écriture :

Pour lever une indétermination, le principe est de transformer l'écriture de l'expression étudiée pour se ramener aux théorèmes généraux, le plus souvent en ***factorisant par le terme dominant***.

EXEMPLE C2

Déterminer la limite de la suite de terme général $7n^3 - 5n^2 + 3n + 2$.

p. 43 capacité 2

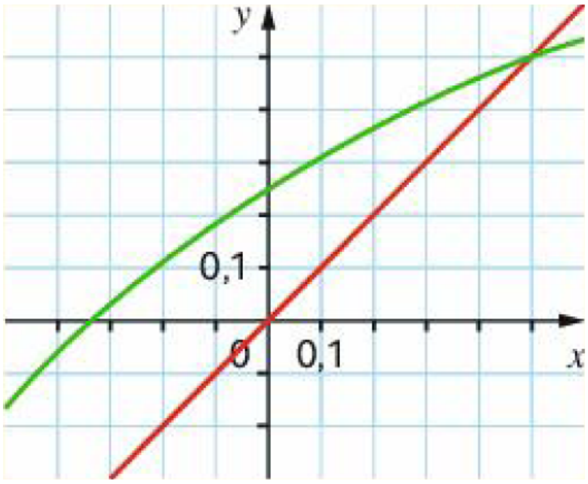
EXEMPLE A1

1. On considère la suite u définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par $u_n=\dfrac{3n+1}{2n+4}$.

a. À l'aide d'un tableur, conjecturer le sens de variation de la suite u et sa limite éventuelle.

b. Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $u_n=\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2n+4}$. Démontrer alors la conjecture précédente.

2. On a représenté ci-contre la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{3x+1}{2x+4}$. Soit la suite v définie par $v_0=-\dfrac{1}{2}$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1}=f(v_n)$. Construire les premiers termes de la suite v. Conjecturer alors son sens de variation et sa limite.



EXEMPLES A2 ET A3

tomc-emd-exa23-cor

Déterminer la limite de chaque suite : **a.** $u_n=n^2-n$ **b.** $v_n=\dfrac{4n^2}{n+1}$

III. Limites et comparaison

THÉORÈMES DE MINORATION/MAJORATION (ADMIS)

Supposons $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n=+\infty$ alors
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n=-\infty$ alors

PROPRIÉTÉ (ADMIS)

Supposons $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

Si (u_n) et (v_n) convergent vers des limites notées l et l' alors : $l \leqslant l'$.

REMARQUE : si $u_n<v_n$ alors on n'a pas nécessairement $l<l'$, mais $l \leqslant l'$. Contre-exemple de la proposition (fausse) « Si $u_n<v_n$ alors $l<l'$ » : $u_n=1-\dfrac{1}{n}$ et $v_n=1+\dfrac{1}{n}$; on a bien $u_n<v_n$ mais $l=l'$.

THÉORÈME DES GENDARMES (OU D'ENCADREMENT) (ADMIS)

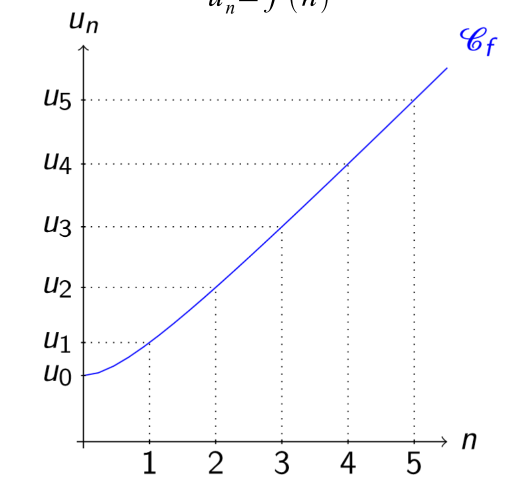
Supposons $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang.

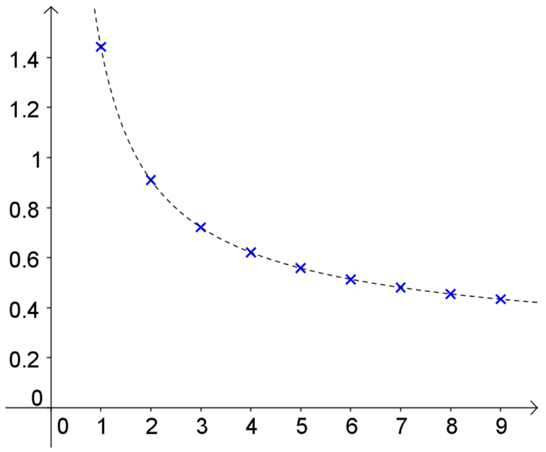
Si (u_n) et (w_n) convergent vers un même réel l alors (v_n) converge vers l .

IV. Suites arithmétiques et géométriques

Suite définie par une formule explicite

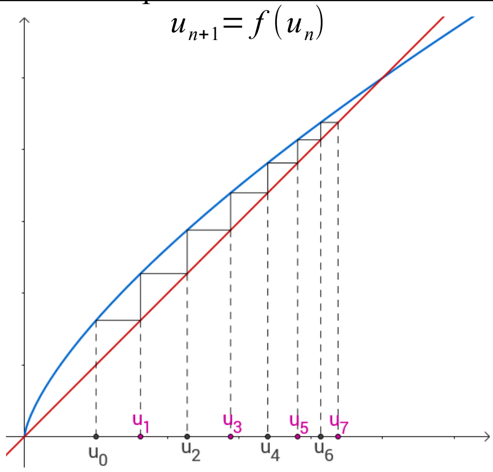
$u_n=f(n)$

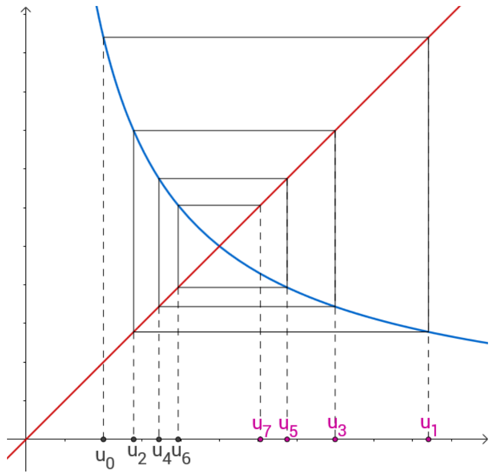




Suite définie par une relation de récurrence

$u_{n+1}=f(u_n)$





/!\ *Attention* /!\ si (u_n) est définie par $u_{n+1}=f(u_n)$, la monotonie de f n'assure pas celle de (u_n).

Exemple C3

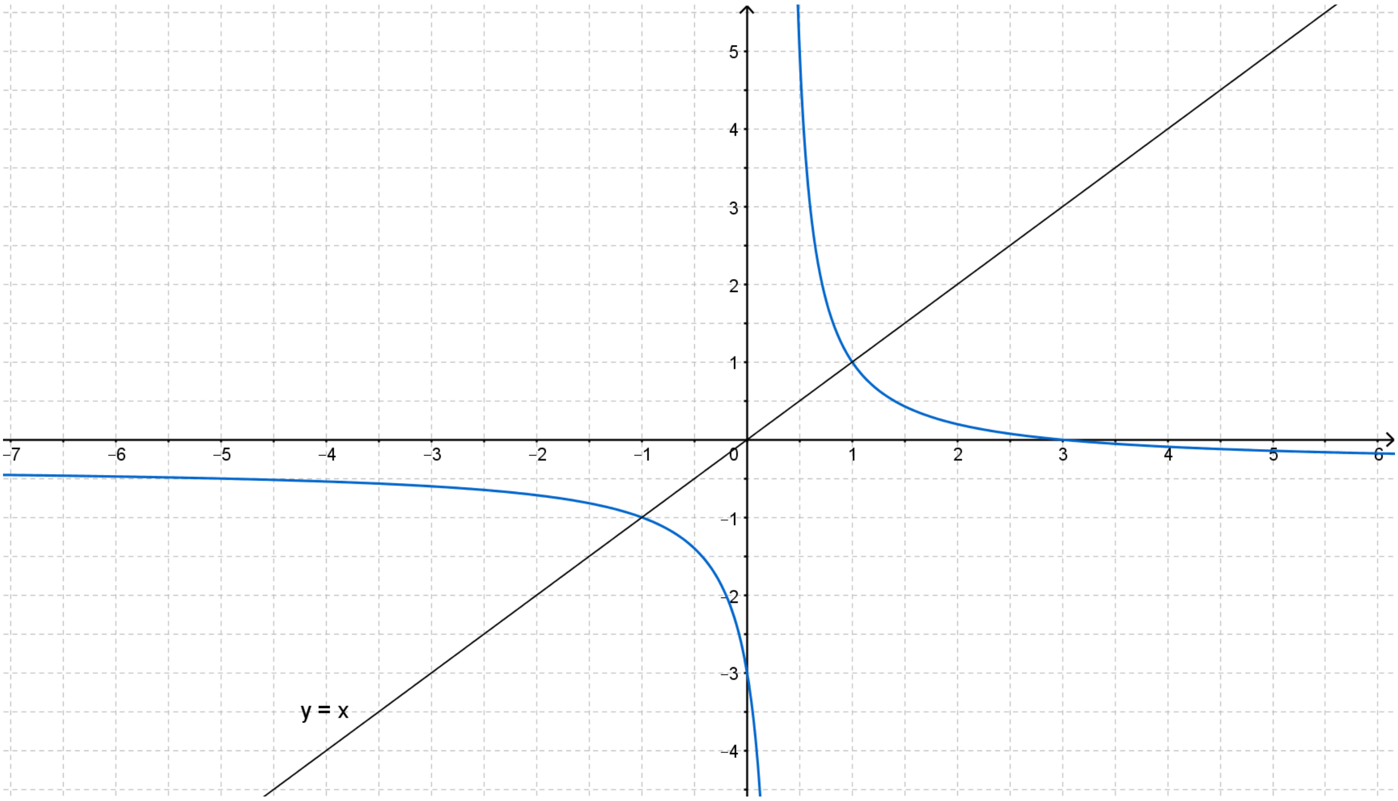
On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=0{,}5$ et $u_{n+1}=\dfrac{-u_n+3}{3u_n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note également f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\dfrac{1}{3}\}$ par $f(x)=\dfrac{-x+3}{3x-1}$.

Sur le graphique de la page suivante sont tracées la courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation $y=x$. Représenter graphiquement les 7 premiers termes de la suite (u_n). Laisser les traits de construction.

Remarque : on pourrait démontrer que $u_n=\dfrac{-3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+1}{-3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n-1}$. En effet, (u_n) est une suite appelée *homographique* et l'on sait étudier ces suites, en étudiant ici $v_n=\dfrac{u_n+1}{u_n-1}$ qui est géométrique

→ voir mathemathieu.fr/1029 (exercice 4)



PROPRIÉTÉS (ADMISES)	q	$q<0$	$0\leqslant q<1$	$q=1$	$q>1$
	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=$	pas au programme			

EXEMPLES A4 À A7

tomc-emd-exa4567-cor

1. Étudier la convergence des suites définies par :

a) $u_n=\dfrac{2}{3^n}$ **b)** $v_n=-3\left(\sqrt{2}\right)^n$ **c)** $w_n=\dfrac{(-3)^n}{5}$.

2. Déterminer la limite de la suite définie par $u_n=2^n-3^n$ pour tout entier n.

PROPRIÉTÉS (ADMISES)

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q positive et de premier terme u_0 .

On note S_n la somme des n premiers termes de (u_n) .

- Si $0\leqslant q<1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n=$
- Si $q>1$: → si $u_0>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n=$

  → si $u_0<0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n=$

Démonstrations :

Exemple A8


p. 45 capacité 3

Au 1er janvier 2018, un particulier fait installer 20 m² de panneaux photovoltaïques à son domicile. Ils produisent environ 95 kWh/m² au cours de la première année, puis l'usure et la salissure engendrent une perte de rendement de 3 % par an. Pour tout entier naturel *n*, on note u_n la quantité d'énergie produite par l'installation durant l'année 2018 + *n*.

1. a. Déterminer la nature de la suite (u_n) et préciser ses éléments caractéristiques.

b. En déduire, pour tout entier naturel *n*, l'expression de u_n en fonction de *n*.

2. Que devient la quantité d'énergie produite au bout d'un grand nombre d'années ?

3. Pour tout entier naturel *n*, on note $\mathrm{S}_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

a. Calculer S_{24} et interpréter le résultat.

b. Écrire une fonction en langage naturel ou en langage Python qui, pour une valeur de *n* prise en argument, retourne la valeur de la somme S_n correspondante.

c. En gardant son installation pendant très longtemps, le particulier peut-il espérer produire plus de 70 MWh à compter du 1er janvier 2018 ?

V. Suites arithmético-géométriques

DÉFINITION

Une suite (u_n) est dite ***arithmético-géométrique*** s'il existe deux réels *a* et *b* tels que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a\, u_n + b \ .$$

Dans la définition ci-dessus :

→ si $a=1$ alors (u_n) est arithmétique et on sait que $u_n = u_0 + n\,b$; ainsi, si $b \neq 0$, (u_n) diverge vers ± ∞.

→ si $b=0$ alors (u_n) est géométrique et on sait que $u_n = u_0\, a^n$; ainsi :

- si $a \in \{0\,;\,1\}$, (u_n) est constante
- si $0 < a < 1$, (u_n) converge vers 0
- si $a > 1$, (u_n) diverge vers ± ∞ (selon le signe de u_0).

On supposera donc ici que $a \neq 1$ (si $b=0$, cela sera moins dérangeant mais c'est un cas particulier).

Exercice (méthode d'étude d'une suite arithmético-géométrique)

Soient *a* et *b* deux réels tels que $a \neq 1$.
On note *f* la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a\,x + b$.

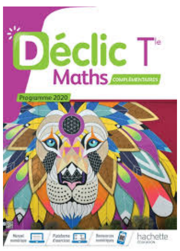
1. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution, que l'on note α, et déterminer α en fonction de *a* et *b*.

2. Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique.

3. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = a^n (u_0 - \alpha) + \alpha$.

4. Conclure sur la convergence de la suite (u_n) .

→ BILAN DU CHAPITRE & TRAVAIL EN AUTONOMIE ←



• Fiche bilan → p.48

• QCM 12 questions corrigées → p.49

• 1 exercice corrigé avec une suite arithmético-géométrique → capacité 4 p.47