

I. Continuité d'une fonction 1

III. Application aux suites 5

II. TVI 3

« La télégenie ne communique plus qu'avec l'amnésie. L'opinion publique ne fait plus la synthèse de l'action d'un homme politique ou des livres d'un auteur. Le sens de la continuité se perd. Le plus récent coup médiatique abolit le passé, le bien comme le mal. Et quelques jours, quelques heures suffisent à l'abolir à son tour. »

Jean Yanne, 1986 (dans « J'me marre », Le cherche midi éditeur, 2003)

I. Continuité d'une fonction

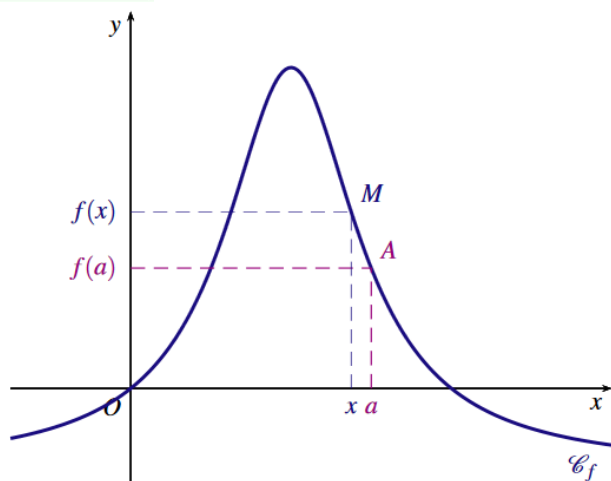
Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soit $a \in I$.

DÉFINITIONS

- On dit que f est continue en a lorsque : $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est continue sur I lorsque f est continue en tout réel de I .

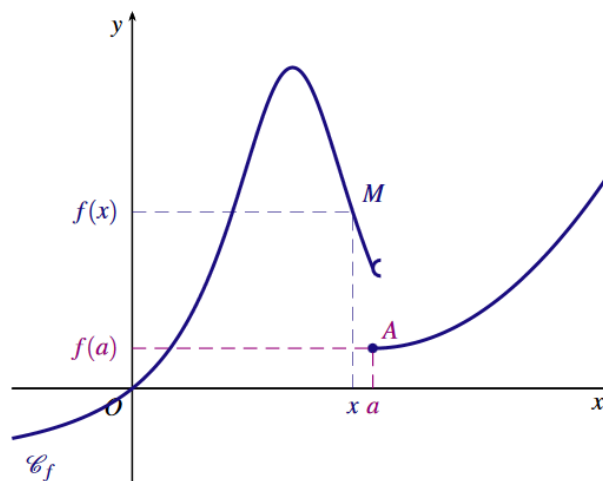
Graphiquement, la courbe représentative d'une fonction continue sur un intervalle I peut être tracée en un seul morceau sur I , sans lever le crayon.

EXEMPLES



La fonction f est continue.

Pour tout réel a de I , on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de $f(a)$ pourvu que x soit suffisamment proche de a .



La fonction f n'est pas continue en a .

La courbe \mathcal{C}_f présente un saut au point d'abscisse a .
Le point M n'est pas proche du point A quand x est proche de a .

Source des images : <http://yallouz.arie.free.fr>

PROPRIÉTÉS (ADMISES)

- Les fonctions polynomiales, rationnelles, racine carrée, valeur absolue, exponentielle, sinus, cosinus sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
- Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sur un intervalle sont continues sur cet intervalle.

THÉORÈME

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Démonstration : Supposons que f est dérivable en a :

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

$$\text{Pour tout } x \neq a, \text{ on a : } f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a).$$

$$\text{Par produit de limites, on a alors : } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a) = f'(a) \times 0 = 0$$

$$\text{c'est-à-dire : } \lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) = 0 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Convention dans un tableau de variations

Une flèche dans un tableau de variations d'une fonction f indique :

- la stricte croissance ou la stricte décroissance de f sur l'intervalle correspondant
- la continuité de la fonction f sur cet intervalle.

EXEMPLES C1 ET C2

1. Étudier la continuité sur \mathbb{R} de la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 7x + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

2. Étudier la continuité sur \mathbb{R} de la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

EXEMPLE A1



On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ ax + 2 & \text{si } x \in]0; 2[\text{ où } a \text{ est un réel.} \\ x^2 - 4x + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

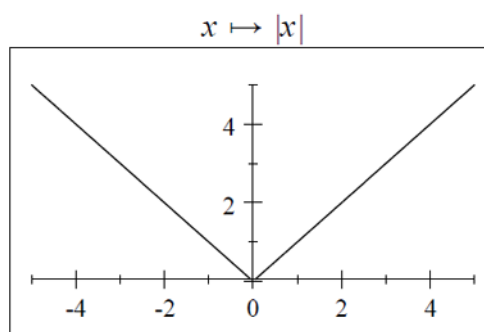
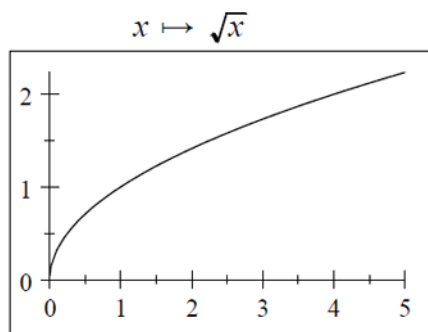
a. Étudier la continuité de la fonction f en 0.

b. Déterminer le nombre réel a tel que la fonction f soit continue sur \mathbb{R} .

S'aider d'un graphique pour visualiser les différents « sauts ».

REMARQUE : la réciproque est fautive.

Par exemple, les fonctions racine carrée et valeur absolue sont continues en 0 mais non dérivable en 0.



Source des images : <http://yallouz.arie.free.fr>

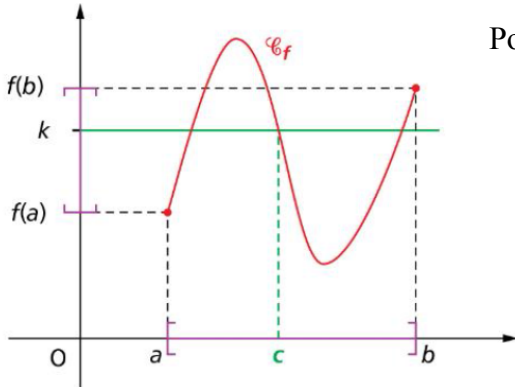
II. TVI

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES (ADMIS¹)

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$:

l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution dans $[a;b]$.



Pourquoi est-il nécessaire que f soit continue sur l'intervalle I ?

COROLLAIRE DU TVI

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, strictement monotone sur I.

Soient a et b deux réels de I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$:

l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution dans $[a;b]$

Démonstration : L'existence d'une solution à l'équation $f(x)=k$ est assurée par le TVI.

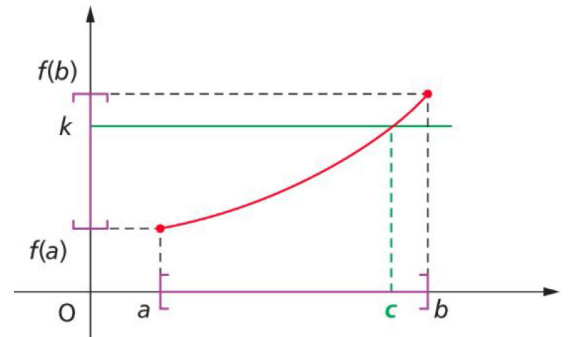
Démontrons par l'absurde l'unicité de cette solution.

Supposons qu'il existe deux réels distincts a et a' de l'intervalle $[a;b]$ solutions de l'équation $f(x)=k$.

Si a est le plus petit des deux réels, alors $a < a'$.

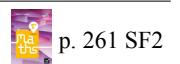
Or, f est strictement monotone sur I donc $f(a) < f(a')$ ou $f(a) > f(a')$.

Ceci est absurde puisque $f(a) = f(a') = k$.



REMARQUE : ces théorèmes s'appliquent aussi lorsque l'intervalle I est de la forme $[a;b[$; $]a;b]$; $]a;b[$; $[a;+\infty[$; $]-\infty;b]$ ou $]-\infty;b[$.

EXEMPLE A2



On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x - x$.

a. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur \mathbb{R} .

b. Démontrer que l'équation $f(x)=2$ admet exactement deux solutions de signes contraires dans \mathbb{R} .

c. On note α la solution positive de l'équation $f(x)=2$. À l'aide d'un outil numérique, donner un encadrement de α au dixième.

¹ Mais démontrable par dichotomie. Voir approfondissement « Démonstration du TVI par dichotomie ».

EXEMPLE C3

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$.

1. Étudier les variations de g .
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution notée α .
Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α .
3. Étudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

III. Application aux suites

CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DE LA CONTINUITÉ

Si une fonction f est continue sur un intervalle I , alors pour toute suite (u_n) à valeurs dans I qui converge vers un réel l avec $l \in I$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$.

Démonstration : On suppose que f est continue sur I , donc en particulier en l .

Soit J un intervalle ouvert contenant $f(l)$.

f est continue sur I donc en particulier en $f(l)$, donc il existe un intervalle ouvert I_J contenant l tel que pour tout réel x de I_J , $f(x) \in J$.

Or, (u_n) converge vers l , donc à partir d'un certain rang N_J , $u_n \in I_J$.

On a donc, dès que $n \geq N_J$: $f(u_n) \in J$.

REMARQUE : on appelle cette propriété la *caractérisation séquentielle de la continuité* car la réciproque est également vraie ! En effet, si pour toute suite (u_n) à valeurs dans I qui converge vers un réel l de I , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$, alors f est continue sur I .

Pour le démontrer, on démontre généralement la contraposée², en utilisant astucieusement les écritures « en epsilon » de la continuité et de la limite : « si f n'est pas continue en un réel a de I , alors il existe une suite (u_n) à valeurs dans I qui converge vers un réel l de I mais telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \neq f(l)$ ».

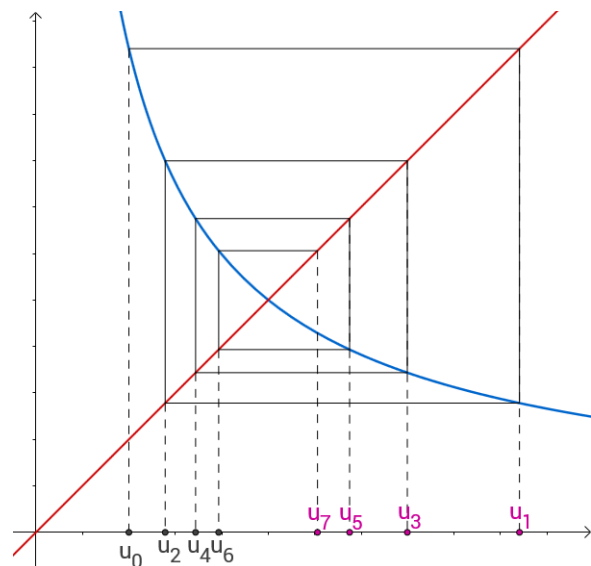
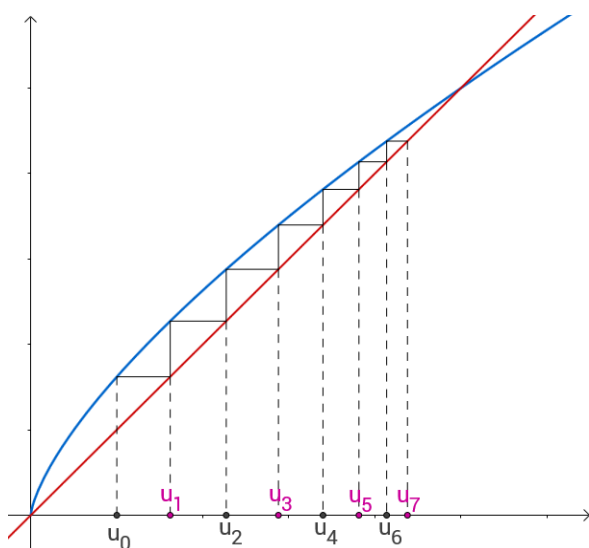
On en déduit alors facilement la propriété suivante :

THÉORÈME DU POINT FIXE

Si $f : I \rightarrow I$ est continue et si $(u_n) : \begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ converge vers un réel l avec $l \in I$, alors l est un point fixe de f : $f(l) = l$.

REMARQUE : ce théorème est capital puisqu'il apporte une information sur la valeur de la limite.

Soit on sait que la suite converge et il ne nous reste plus qu'à résoudre $f(x) = x$, soit on ne sait pas si la suite converge et dans ce cas on suppose qu'elle converge et on a une information sur l'éventuelle limite : elle vérifie $f(l) = l$.



2 Voir par exemple <http://www.mathieu-mansuy.fr/pdf/PCSI5-chapitre13.pdf>.

Il existe des **fonctions continues partout, mais dérivable nulle part**... Si si !

Elles sont apparues au XIX^e siècle, et ont été loin de laisser indifférent. Par exemple, Charles **Hermite** écrira en **1893** :

« Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées ».

On les appelle plus affectueusement “pathologiques”...

En **1905**, Henri **Poincaré** commente l'état des mathématiques de la manière suivante :

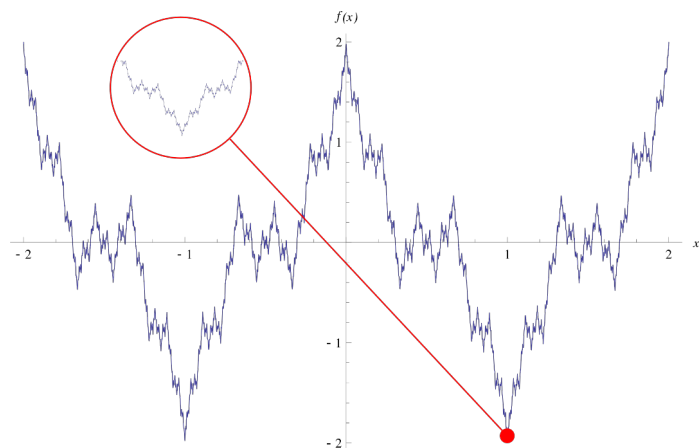
« La logique parfois engendre des monstres. Depuis un demi-siècle on a vu surgir une foule de fonctions bizarres qui semblent s'efforcer de ressembler aussi peu que possible aux honnêtes fonctions qui servent à quelque chose. Plus de continuité, ou bien de la continuité, mais pas de dérivées, etc. Bien plus, au point de vue logique, ce sont ces fonctions étranges qui sont les plus générales, celles qu'on rencontre sans les avoir cherchées n'apparaissent plus que comme un cas particulier. Il ne leur reste qu'un tout petit coin.

Autrefois, quand on inventait une fonction nouvelle, c'était en vue de quelque but pratique ; aujourd'hui, on les invente tout exprès pour mettre en défaut le raisonnement de nos pères, et on n'en tirera jamais que cela. »

La toute première fonction de ce type est l'œuvre du mathématicien tchèque Bernard **Bolzano**, découverte vers **1830**. Mais les manuscrits de ses travaux sur cette fonction, dite fonction de Bolzano³, ne sont redécouverts qu'en 1920 et publiés qu'en **1922**.

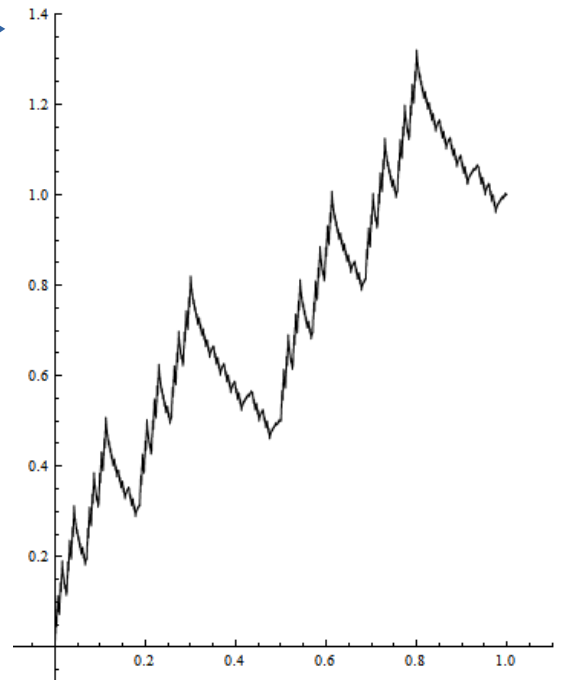
Charles **Cellérier** découvre aussi, vers **1860**, un autre exemple de fonction continue nulle part dérivable sans connaître celle de Bolzano. Son travail reste aussi inédit jusqu'à sa mort en 18909. Il faudra tout de même attendre **1930** avant qu'elle ne soit publiée. Par sa construction, on peut l'identifier comme étant la première fractale de l'histoire !

Le 18 juillet **1872**, le mathématicien Karl **Weierstrass** présente devant une foule médusée non pas une, toute une famille entière de fonctions continues dérivables nulle part ! Il en existait bien deux



autres alors, mais n'étaient pas publiées (celle de Bolzano et celle de Cellérier, qui est un cas particulier de celle de Weierstrass).

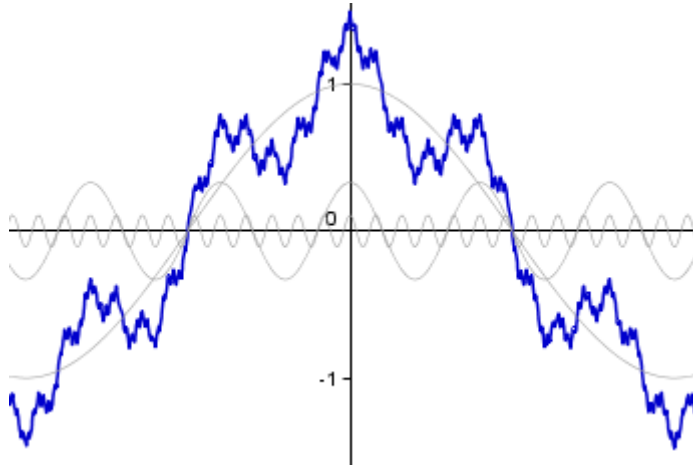
Les courbes de Weierstrass sont données par la formule suivante : $\sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$.



→ à voir : https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_de_Weierstrass.

3 Voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_de_Bolzano.

Autrement dit, une somme de fonctions cosinus (toutes aussi continues et dérivables les unes que les autres, mais de plus en plus sinueuses et tassées), ce qui donne :



Bref :

dérivable + dérivable + dérivable + ...
= non dérivable !

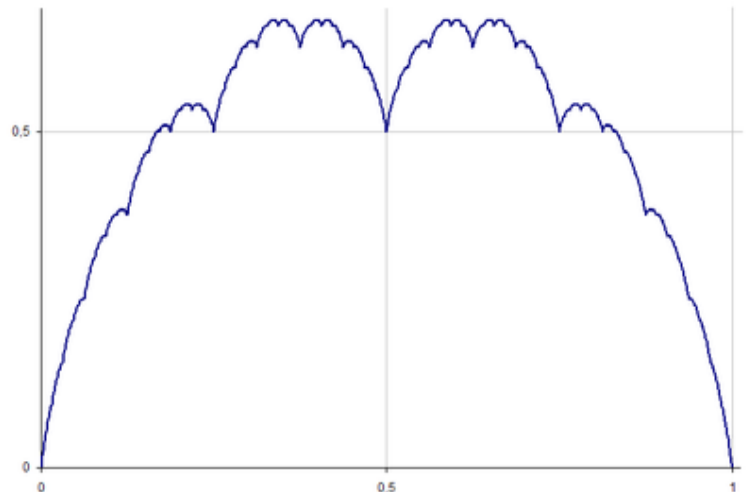
En gris les sinusoïdes à sommer pour obtenir la fonction

→ à voir :

https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_de_Weierstrass#/media/Fichier:Weierstrass_Animation.gif

Une petite dernière, datant de 1903 : la courbe de Tagaki, alias courbe du blanc-manger (parce qu'elle ressemblerait au blanc-manger, un pudding au lait d'amande ; on y ajoute de la noix de coco, de l'abricot ou des fruits rouges, selon les préférences culinaires).

Pour un exercice accessible au niveau Terminale, voir l'exercice proposé par Paul Milan : mathemathieu.fr/blanc-manger.



→ BILAN DU CHAPITRE & TRAVAIL EN AUTONOMIE ←



- Fiche bilan → p.266
- QCM 8 questions corrigées → p.267
- Exercices corrigés → 31 à 38 p.268
- Exercice type Bac guidé & corrigé → 104 p.280

• Méthodes et exercices corrigés en vidéo :

→ maths-et-tiques : tsm-cfas-ym

→ jaicompris.com : tsm-cfas-jaicompris