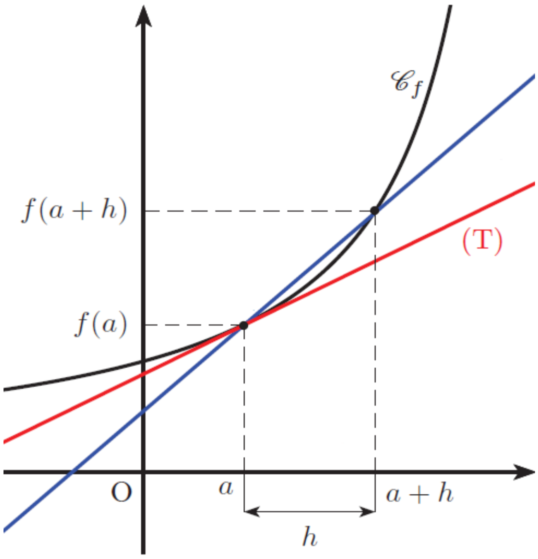
COMPLÉMENTS SUR LA DÉRIVATION ET CONVEXITÉ

Rappels de Première

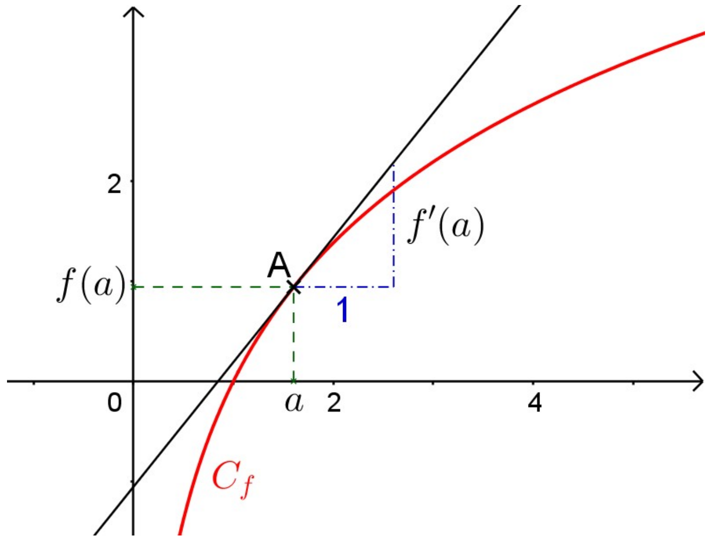
cours → p.224
7 exercices corrigés → p.225

tsm-cdc-rap-fb1 tsm-cdc-rap-fb2
tsm-cdc-rap-sf1 tsm-cdc-rap-sf2



Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



I. Dérivation d'une fonction composée

PROPRIÉTÉ

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, à valeurs dans un intervalle J.

Soit g une fonction dérivable sur J.

Alors $g \circ u$ est dérivable sur I et $(g\circ u)'=u'\times(g'\circ u)$.

Démonstration : dans le chapitre « Continuité d'une fonction, application aux suites ».

→ À CONNAÎTRE ←

- si u est dérivable et strictement positive : $\left(\sqrt{u}\right)'=$
- si u est dérivable, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $(u^n)'=$
- si u est dérivable : $(\mathrm{e}^u)'=$

Exemple A1

p. 229 SF2

f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^2+x}$.

a. Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

b. Calculer la dérivée de f sur $]0;+\infty[$.

c. Étudier le signe de f' sur $]0;+\infty[$ et en déduire les variations de f sur $[0;+\infty[$.

Exemples C1 et C2

1. Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^3+5x^2+6x}$.

Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et déterminer f' .

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\left(-8x^5+7x^4-6x^3+5x-4\right)^5$.

Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer g' .

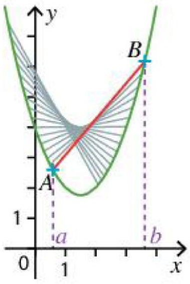
II. Convexité/concavité et point d'inflexion d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

DÉFINITION

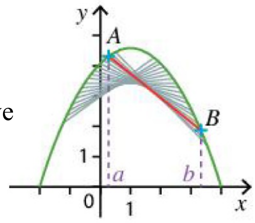
• On dit que f est ***convexe*** sur I si sa courbe représentative est entièrement située en <u>dessous</u> de chacune de ses cordes.

• On dit que f est ***concave*** sur I si sa courbe représentative est entièrement située <u>au-dessus</u> de chacune de ses cordes (autre définition : si $-f$ est convexe).



← convexe

→ concave



source des images :
éd. Hachette, coll. Barbazo, 2020

THÉORÈMES (ADMIS)

Si f est dérivable sur I :

- f est ***convexe*** si et seulement si f' est ***croissante*** sur I
- f est ***concave*** si et seulement si f' est ***décroissante*** sur I

COROLLAIRES

Si f est deux fois dérivable sur I : *se lit « f seconde »*

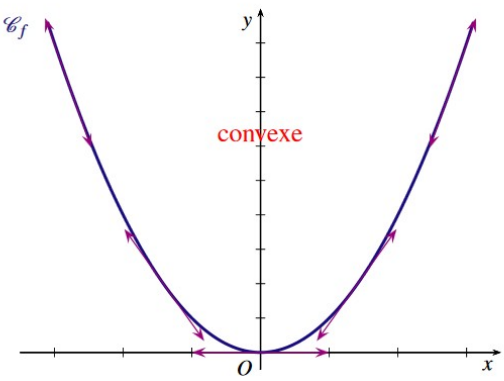
- f est ***convexe*** si et seulement si f'' est ***positive*** sur I
- f est ***concave*** si et seulement si f'' est ***négative*** sur I

THÉORÈMES (ADMIS)

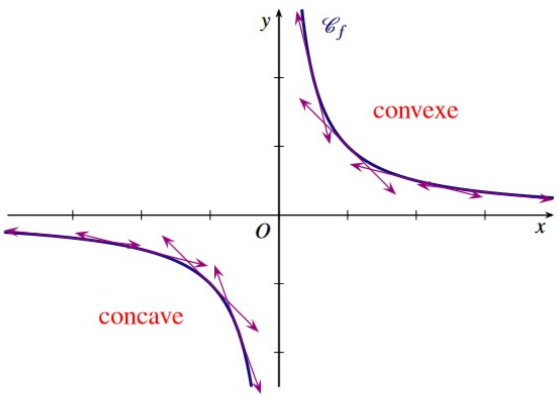
Si f est dérivable sur I :

- f est ***convexe*** si et seulement C_f est entièrement située ***au-dessus*** de chacune de ses ***tangentes***.
- f est ***concave*** si et seulement C_f est entièrement située ***en dessous*** de chacune de ses ***tangentes***.

<u>Exemples</u> :



La fonction carré $x \longmapsto x^2$ est convexe.



La fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $]0;+\infty[$

Source des images : http://yallouz.arie.free.fr

<u>Démonstration de la propriété « si f’’ est positive, alors f est au-dessus de ses tangentes »</u> :

DÉMO. EX.
tsm-cdc-demo1
< 9 min

ou

<u>Exemple C3</u>

La fonction exp est convexe sur ℝ.

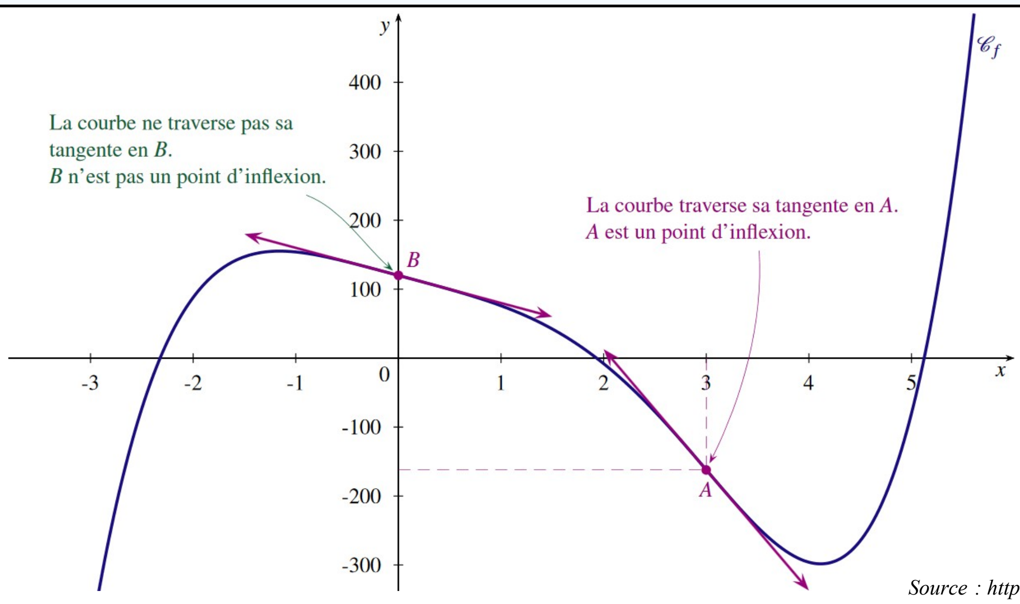
p. 231 SF4

<u>Exemple A2</u>

f est la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3}{x+2}$. Étudier la convexité de f sur $]-2;+\infty[$.

> **DÉFINITION**
>
> On note C_f la courbe représentative de *f*. S’il existe un point A de C_f tel que cette dernière « traverse » sa tangente en A, on dit que A est un ***point d’inflexion*** de C_f .
>
> Plus précisément, un point d’inflexion est un point où s’opère un changement de convexité.

<u>Exemple</u> :



Source : http://yallouz.arie.free.fr

<u>Exemple C4</u>

La courbe ci-dessus est celle de la fonction polynomiale f définie par $f(x)=x^5-5x^4-40x+120$.

Démontrer que sa courbe admet un unique point d’inflexion.

PROPRIÉTÉ

Si f est convexe sur I, alors : $\forall\ (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}$.

Démonstration : supposons que f est convexe sur I.

Soient $A(a\,;f(a))$ et $B(b\,;f(b))$ deux points de C_f. Si $a=b$, les inégalités sont triviales.
Si $a\neq b$: f est convexe donc C_f est en dessous de la corde [AB], c'est donc en particulier vrai au point milieu de la corde [AB] (on le note M), c'est-à-dire au point d'abscisse $\frac{a+b}{2}$.

Or (AB) a pour équation réduite $y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ donc l'ordonnée de M est :

$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(\frac{a+b}{2}-a\right)+f(a)=\ldots=\frac{f(a)+f(b)}{2}$, d'où le résultat.

REMARQUE 1 (HORS PROGRAMME[1]) : si f est continue sur I, la réciproque est vraie ! Si f n'est pas continue, la réciproque n'est pas nécessairement vraie (contre-exemple compliqué, pathologique[2]…).

REMARQUE 2 : une fonction convexe n'est pas nécessairement dérivable.
Par exemple, la fonction $x\longmapsto|x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0.

REMARQUE 3 (HORS PROGRAMME[3]) : on peut même démontrer que si f est convexe sur I, alors pour tous

réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de I et pour tous réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$,

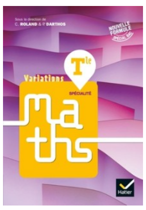
$$f\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k).$$

C'est l'***inégalité de Jensen***, due au mathématicien danois Johan Jensen (1859–1925) qui en donna la preuve en 1906.

EXEMPLE C5

La fonction exp étant convexe sur $\mathbb{R}$, on peut donc écrire que : $\forall\ (x\,;y)\in\mathbb{R}^2,\ \mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}\leqslant\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}{2}$.

→ BILAN DU CHAPITRE & TRAVAIL EN AUTONOMIE ←



- Fiche bilan → p.236
- QCM 12 questions corrigées → p.237
- Exercices corrigés → 32 à 39 p.238
- Exercice type Bac guidé & corrigé → 105 p.250

• Un exercice type corrigé (économie : coût marginal) → tsm-cdc-met

• Méthodes et exercices corrigés en vidéo : → maths-et-tiques : tsm-cdc-ym1 et tsm-cdc-ym2

1 Voir l'approfondissement « Convexité, continuité et milieux » : mathemathieu.fr/1493.
2 Voir page 3 de math.univ-lyon1.fr/capes/IMG/pdf/new.caracterisation.pdf et/ou fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quation_fonctionnelle_de_Cauchy.
3 Voir l'approfondissement « Inégalité de Jensen » : mathemathieu.fr/1492.