

Au XVI^e siècle, les algébristes italiens apprennent à résoudre les équations du troisième degré, en les ramenant à des équations du second degré dont la résolution est connue depuis le IX^e siècle grâce aux mathématiciens arabes. Au cours de cette recherche vont apparaître les **nombres complexes**.

La racine cubique, contrairement à la racine carrée, est définie pour tout réel, car la fonction cube est strictement croissante sur \mathbb{R} , et varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Par exemple : $\sqrt[3]{-8} = -2$. En effet : $(-2)^3 = -8$.

On cherche ici à résoudre une équation du type $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (où $a \neq 0$).

PARTIE A : SIMPLIFICATION DU PROBLÈME

1. Expliquer pourquoi on peut toujours se ramener au cas $a=1$.
2. Montrer qu'il suffit de s'intéresser à la résolution des équations du type $X^3 - pX - q = 0$.

Aide : poser $x = X - \frac{b}{3}$.

PARTIE B : LA MÉTHODE DE TARTAGLIA-CARDAN SUR UN EXEMPLE

On souhaite résoudre l'équation (E) : $x^3 - 6x - 20 = 0$, c'est-à-dire $x^3 = 6x + 20$.

Supposons que x est une solution de cette équation.

1. x peut s'écrire sous la forme $u+v$.

Montrer qu'on a alors : $u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = 6(u+v) + 20$. (*)

2. Afin de simplifier cette égalité, on souhaite que : $uv=2$. Ainsi, l'égalité (*) s'écrirait $u^3 + v^3 = 20$.

On pose $U = u^3$ et $V = v^3$.

- a) Montrer que $U+V=20$ et $UV=8$.
- b) Montrer qu'alors U et V sont solutions de l'équation du second degré $X^2 - 20X + 8 = 0$.
- c) Résoudre cette équation dans \mathbb{R} , et en déduire des valeurs de U et V .
- d) En déduire les valeurs de u et v , et celle de x .
- e) En déduire qu'une solution de (E) est : $\sqrt[3]{10+2\sqrt{23}} + \sqrt[3]{10-2\sqrt{23}}$.

3. Étudier la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 6x + 20$ sur \mathbb{R} .

Combien l'équation (E) a-t-elle de solutions ?

4. Conclure.

PARTIE C : DES NOMBRES IMPOSSIBLES, LE GÉNIE DE BOMBELLI

La méthode de Tartaglia-Cardan conduit cependant, dans certains cas, à des difficultés que Bombelli (1526 – env. 1572) va essayer de surmonter. Il publie en 1572 dans *L'Algebra* l'exemple suivant.

On souhaite résoudre l'équation (E') : $x^3 = 15x + 4$.

1. Étudier la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 15x - 4$ sur \mathbb{R} .

Combien l'équation (E') a-t-elle de solutions ?

2. En procédant comme dans la partie B, montrer que U et V sont solutions de l'équation :

$$(X-2)^2+121=0.$$

Cette équation a-t-elle des solutions réelles ?

3. Devant cette difficulté, Bombelli décida de faire comme si -121 était le carré d'un nombre imaginaire qui s'écrirait $11\sqrt{-1}$. Il appelait $\sqrt{-1}$ « *piu di meno* » (*plus que moins*).

Grâce à ce stratagème, il trouva les solutions de (E') :

a) Déterminer U et V .

b) On avait posé $U=u^3$ et $V=v^3$. Mais la racine cubique de U ou de V a-t-elle un sens ici ?

c) Calculer $(2+\sqrt{-1})^3$ et $(2-\sqrt{-1})^3$.

d) En déduire u et v , puis x . En déduire que 4 est une solution de (E').

4. Grâce à la question précédente, factoriser $x^3-15x-4$. En déduire les autres solutions de (E').

Pour résoudre une équation dans \mathbb{R} , Bombelli a utilisé un nombre qui n'est pas réel, en lui appliquant les propriétés des réels. Mais sa méthode fonctionne bien, elle permet effectivement (exemple à l'appui) de trouver les solutions...

La méthode de Cardan ne pouvait pas s'appliquer, à moins d'accepter de quitter temporairement le domaine du possible et de travailler sur des nombres imaginaires utilisant des racines carrées de nombres négatifs. Comme si *pour résoudre ce problème, il suffisait de s'en extraire...*



Nicolo Tartaglia (1499/1500 – 1557),
italien



Girolamo Cardano (1501 – 1576),
italien
(nommé Jérôme Cardan en français)



Rafaele Bombelli (1526 – vers 1572),
italien

HISTOIRE DES NOMBRES COMPLEXES

Pour une histoire plus complète des nombres complexes, voir *Une longue histoire, rocambolesque et un peu complexe. Histoire des nombres impossibles* : <https://www.mathemathieu.fr/500>.