

« Exponentielle et logarithme sont au restaurant. Qui paie l'addition ?
Exponentielle car logarithme népérien. »

I. Fonction réciproque de la fonction \exp	1
II. Propriétés algébriques	2
III. Étude de la fonction \ln	4
III.1 Dérivée et variations	4

III.2 Limites aux bornes	5
III.3 Convexité	6
IV. Limites usuelles	6
V. Dérivée d'une fonction composée avec \ln	7

Rappels de Première



cours → p.284

8 exercices corrigés → p.285

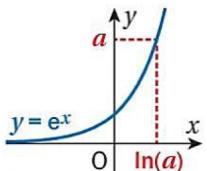
Rappels sur la fonction \exp :

tsm-lf-rap-fb

tsm-lf-rap-sf

I. Fonction réciproque de la fonction \exp

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution réelle.



DÉFINITIONS

- On appelle ce réel **logarithme népérien de a** et on le note $\ln(a)$.
Si aucune confusion n'est possible, on le note parfois $\ln a$.
- On note \ln la fonction qui, à tout réel $x > 0$, associe le réel $\ln(x)$.

→ À RETENIR ←

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^* : e^x = a \Leftrightarrow$$

REMARQUE : on dit que les fonctions \exp et \ln sont des **fonctions réciproques**.

Au sens de la composition de fonctions, on dit aussi parfois que \ln est l'inverse de \exp , mais cela est confus car l'inverse de \exp est souvent compris comme $\frac{1}{\exp}$.

! !

PROPRIÉTÉS IMMÉDIATES

- $\ln 1 =$
- $\ln e =$
- $\forall x \in \mathbb{R} : \ln(e^x) =$
- $\forall x \in]0; +\infty[: e^{\ln(x)} =$

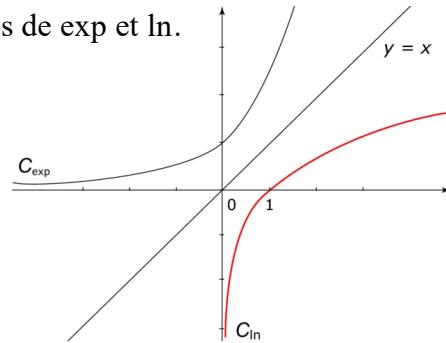
Démonstrations :

PROPRIÉTÉ

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions \exp et \ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.

Démonstration : on note C_{\exp} et C_{\ln} les courbes représentatives de \exp et \ln .

On note (d) la droite d'équation $y=x$.



II. Propriétés algébriques

THÉORÈME (RELATION FONCTIONNELLE)

Pour tous réels x et y strictement positifs : $\ln(xy) =$.

Démonstration :

→ À RETENIR ←

La fonction \ln transforme les en .

REMARQUE : par récurrence, on pourrait alors démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1; x_2; x_3; \dots; x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \ln\left(\prod_{k=1}^n x_k\right) =$$

PROPRIÉTÉS

Pour tous réels x et y strictement positifs et pour tout entier relatif n :

- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) =$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) =$
- $\ln\sqrt{x} =$
- $\ln(x^n) =$

Démonstrations :

-
-

-
- \rightarrow pour $n \in \mathbb{N}$: par récurrence sur n
 \rightarrow pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$: on pose $n = -m$ et alors
 $\ln(x^n) = \ln(x^{-m}) =$

EXEMPLES C1 à C3

1. Exprimer en fonction de $\ln(2)$ chacun des nombres réels suivants.

a) $\ln(64)$ b) $\ln\left(\frac{1}{8}\right)$

2. Simplifier « au maximum » $\ln(\sqrt{108})$.

EXEMPLES A1 à A4

1. Exprimer en fonction de $\ln(2)$ chacun des nombres réels suivants.

a) $\ln(4)$ b) $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

2. Exprimer en fonction de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$ chacun des nombres réels suivants.

a) $\ln(24)$ b) $\ln(\sqrt{72})$



p. 289 SF2

REMARQUES : puisque $\ln(x^n) = n \ln(x)$ pour $x > 0$ et n un entier relatif, on a $x^n = e^{n \ln(x)}$.

On peut donc étendre ces propriétés aux réels en définissant une puissance non entière :

DÉFINITION Pour tout réel $x > 0$, pour tout réel y : $x^y = e^{y \ln(x)}$.

Ainsi, on peut donner du sens à $3^{\sqrt{2}}$, 8^π ou $5^{\frac{7}{4}}$:

$$3^{\sqrt{2}} = \quad 8^\pi = \quad 5^{\frac{7}{4}} =$$

Pour tout réel $a > 0$, on appelle **fonction exponentielle de base a** , notée \exp_a , la fonction définie sur \mathbb{R} par $\exp_a(x) = a^x$ (ainsi, $\exp = \exp_e$). Démontrons que pour tout réel $a > 0$ et tous réels x et y : $a^{x+y} = a^x a^y$:

On peut d'ailleurs démontrer que :

▪ les fonctions solutions de l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$ qui sont définies et dérivables sur $]0; +\infty[$ sont les fonctions de la forme $f(x) = k \ln(x)$ où $k \in \mathbb{R}$ (ce qui permet de définir les logarithmes « de base a », notamment la fonction \log , le logarithme décimal très utilisé en sciences).

Ces fonctions sont même les seules solutions continues !

\rightarrow Voir l'approfondissement « *Équation fonctionnelle des logarithmes* ».

▪ les fonctions solutions non nulles de l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) f(y)$ qui sont définies et dérivables sur \mathbb{R} sont les fonctions \exp_a où $a \in \mathbb{R}$.

Ces fonctions sont même les seules solutions continues !

\rightarrow Voir l'approfondissement « *Équation fonctionnelle des exponentielles* ».

Si a est un réel négatif, peut-on quand même donner un sens à a^x ? Par exemple à $(-3)^{\sqrt{2}}$?

Oui ! En effet, votre calculatrice vous donnera un message d'erreur ou, si le mode « complexe » est activé, un *nombre complexe* (enseigné en T^{le} option « mathématiques expertes »).

III. Étude de la fonction \ln

III.1 Dérivée et variations

PROPRIÉTÉ

La fonction \ln est dérivable sur son ensemble de définition et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Démonstration :

→ La dérivarilité de \ln sur \mathbb{R}_+^* est admise en Terminale, mais :

• la courbe C_{\ln} étant la symétrique de C_{\exp} avec \exp qui est dérivable sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R}_+^* , il est intuitif que C_{\ln} est également dérivable sur \mathbb{R}_+^* ;

• la démonstration est tout à fait possible !

→ Voir l'approfondissement « Dérivarilité de la fonction \ln » pour une démonstration qui consiste à démontrer que \ln est dérivable en 1 puis à en déduire qu'elle est dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

→ Voici une démonstration qui suppose connu¹ que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$:

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x+h > 0$.

On cherche à démontrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \frac{1}{x}$.

$$\frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \ln\left(\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right)$$

On pose $n = \frac{x}{h}$. Alors $\frac{h}{x} = \frac{1}{n}$ et $\frac{1}{h} = \frac{n}{x}$

$$\text{donc } \ln\left(\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right) = \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right) = \ln\left(\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x} \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right).$$

$$\text{Or, } \lim_{h \rightarrow 0} n = +\infty \text{ donc } \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right).$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ donc, par composition et produit de limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = \frac{1}{x}.$$

→ En admettant que \ln est dérivable :

on pose $f(x) = e^{\ln(x)}$ pour tout $x > 0$.

Alors $f'(x) = \ln'(x) \times \exp'(\ln(x)) = \ln'(x) \times x$

mais aussi : $f(x) = x$ donc $f'(x) = 1$

d'où le résultat.

PROPRIÉTÉ

La fonction \ln est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

Démonstration :

¹ Pour une démonstration de cette limite, voir l'approfondissement « e et la capitalisation continue (1) » ou « e et la capitalisation continue (2) ».

COROLLAIRES (IMMÉDIATS)

- $\ln x < 0 \Leftrightarrow$
- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow$
- $\ln x > 0 \Leftrightarrow$
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow$

EXEMPLES C4 À C6

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $4 \ln(-2x+7) = 3$.
2. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $\ln(3x+2) < -4$.
3. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $0,9^n < 0,01$.

EXEMPLE A5

- a)** Déterminer l'ensemble \mathcal{E} des nombres réels x pour lesquels l'équation $\ln(3x+1) = 1$ est définie.
b) Résoudre dans \mathbb{R} cette équation.



p. 291 SF3

EXEMPLES A6 À A9

tsm-fln-exa6789-cor

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

- a)** $\ln(x) = 5$ **b)** $e^x = 3$ **c)** $\ln(1-x) \leq -1$ **d)** $e^{2x-3} > 4$.

EXEMPLES A10 ET A11

tsm-fln-exa1011-cor

1. Résoudre l'équation $\ln(4x-1) = \ln(2-x)$.
2. Résoudre l'inéquation $\ln(x^2+2x-3) \geq \ln(2)$.

EXEMPLE A12

tsm-fln-exa12-cor

Résoudre l'inéquation $\left(\frac{2}{5}\right)^n < 10^{-3}$ où $n \in \mathbb{N}$.

III.2 Limites aux bornes

PROPRIÉTÉS

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$

Démonstrations :

- Soit $A > 0$. Soit $x > 0$: $\ln(x) > A \Leftrightarrow x > e^A$.

Donc, pour tout réel $A > 0$, $[A; +\infty[$ contient tous les réels $\ln(x)$ dès que x est assez grand d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

- En 0, on peut faire comme ci-dessus, ou :

EXEMPLE C7

tsm-fln-exc7-cor

Déterminer, si elle existe, la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-2)}{\ln(x+3)}$.

EXEMPLE A 13



On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + x - 3$.

On admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$. Dresser le tableau de variations de f .

III.3 Convexité

PROPRIÉTÉ

La fonction \ln est concave sur son ensemble de définition.

Démonstration :

REMARQUE : on peut en déduire que la courbe représentative de \ln est toujours en dessous de ses tangentes, et obtenir ainsi de nombreuses inégalités, comme $\ln(x) \leq x - 1$ ou $\ln(x) \leq \frac{x}{e}$.

IV. Limites usuelles

PROPRIÉTÉS (CROISSANCES COMPARÉES)

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln(x) = 0$

Démonstrations :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

donc, par composition de limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^{\ln(x)}} = 0$ ie $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

→ pour une autre démonstration qui utilise le théorème des gendarmes,
voir l'approfondissement « Croissance comparée de $\ln(x)$ et x ».

Pour $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$, raisonner par récurrence sur n .

•

Pour $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln(x) = 0$, raisonner par récurrence sur n .

→ UTILE À RETENIR ←

La fonction puissance « l'emporte » sur \ln en 0 et $+\infty$.

PROPRIÉTÉ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

Démonstration :

→ pour une démonstration qui n'utilise pas la dérivabilité de \ln , voir l'approfondissement « Dérivabilité de la fonction \ln ».

EXEMPLE A 14



p. 293 SF5

- Étudier la limite : a) en $+\infty$ de f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - 2x$.
b) en 0 de la g définie sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ par $g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^3}$.
c) en 0 et en $+\infty$ de h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = 4x - x \ln(x)$.
d) en $-\infty$ de k définie sur \mathbb{R} par $k(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.

V. Dérivée d'une fonction composée avec \ln

PROPRIÉTÉ

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I .

Alors la fonction composée $\ln u$ est dérivable sur I et sa dérivée est : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

Démonstration :

EXEMPLE C 8

Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \ln(5x^4 - 2)$.

Démontrer que f est dérivable sur $[1;+\infty[$, et déterminer sa fonction dérivée f' .

→ [BILAN DU CHAPITRE & TRAVAIL EN AUTONOMIE](#) ←



- Fiche bilan → p.296
- QCM 14 questions corrigées → p.297
- Exercices corrigés → 42 à 53 p.298
- Exercice type Bac guidé & corrigé → 132 p.310

- QCM 7 questions corrigées → [tsm-fln-mqcm](#)
- Deux exercices types corrigés → [tsm-fln-met1](#) et [tsm-fln-met2](#)
- Méthodes et exercices corrigés en vidéo :
 - maths-et-tiques : [tsm-fln-ym](#)
 - jaicompris.com : [tsm-fln-jaicompris](#)

→ En 1797, dans son Tome 1 du *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, le mathématicien français **Sylvestre-François Lacroix** (1765 – 1843) écrit² :

24. Pour que $1/a$ soit déterminé, il faut faire une hypothèse sur $1/e$; la plus simple sans doute est de prendre $1/e = 1$, auquel cas on tombe sur une espèce particulière de logarithmes, qui sont précisément ceux que Neper a considérés. On les a nommés depuis *logarithmes hyperboliques*, parce qu'on peut les déduire de la quadrature des espaces compris entre l'hyperbole équilatère et ses asymptotes; mais cette dénomination est vicieuse, car on peut également tirer de la quadrature de l'hyperbole en général, tous les systèmes de logarithmes. Il seroit donc plus convenable d'appliquer aux premiers le nom de l'inventeur, et de consacrer ainsi la mémoire de celui qui a rendu un aussi grand service aux Mathématiques: on pourroit les appeler logarithmes de Néper, ou logarithmes Népériens.

Or, contrairement à ce que dit Lacroix, Napier n'avait pas du tout établi de tels logarithmes. Mais il semble bien que l'on doive à Lacroix l'appellation *logarithme népérien*, en hommage au mathématicien écossais **John Napier** (1550 – 1617), dont le nom est francisé en Neper, qui publia les premières tables logarithmiques en 1614.

→ Généralement, l'origine des logarithmes népériens est datée en 1647 : **Grégoire de Saint-Vincent** (1584 – 1667) travaille sur la quadrature de l'hyperbole et démontre que la fonction obtenue vérifie la propriété d'additivité des fonctions logarithmes. Cependant, il ne fait pas le lien avec les logarithmes de Napier. C'est son disciple **Alphonse Antoine de Sarasa** (1617 – 1667) qui le fera en 1649. Ainsi, le logarithme népérien s'est tout d'abord appelé *logarithme hyperbolique*, en référence à l'aire sous l'hyperbole qu'il représente.

En 1748, dans son *Introductio in analysin infinitorum*, le mathématicien suisse **Leonhard Euler** (1707 – 1783) parle également de *logarithme naturel* :

On lit souvent que l'appellation *logarithme naturel* apparaît pour la première fois en 1668 dans *Logarithmotechnia*³ de **Nicolaus Mercator**⁴ (1620 – 1687). Or, en lisant l'ouvrage (en latin), je n'ai vu aucune mention de ce terme...

122. Comme on peut prendre à volonté la base a pour établir un système de logarithmes, nous pourrons la prendre telle, que k devienne = 1. Supposons donc $k = 1$; la série trouvée ci-dessus (art. 116) deviendra $a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c$, dont les termes convertis en décimales, & ajoutés donnent pour a cette valeur 2,71828182845904523536028, dont le dernier chiffre est encore exact. Les logarithmes calculés sur cette base, s'appellent Logarithmes *naturels* ou *hyperboliques*, parce qu'ils peuvent représenter la quadrature de l'hyperbole. Au reste, pour abréger, nous désignerons constamment ce nombre 2,718281828459 &c. par la lettre e , qui indiquera par conséquent la base des logarithmes naturels ou hyperboliques, à laquelle répond la valeur de $k = 1$; c'est-à-dire, que cette lettre e exprimera la somme de la série $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c$. continuée à l'infini.

→ Cette fonction fut notée **I.** ou **l.**, dès le début du XVIII^e siècle, et jusque dans la première moitié du XIX^e siècle, puis **log.** ou **log** dès la fin du XVIII^e siècle, puis **Log** pour la différencier de la fonction **log** (logarithme de base quelconque, ou plus particulièrement logarithme décimal), ou encore **logh** (pour « logarithme hyperbolique »), avant que ne tente de s'imposer la notation préconisée par la norme AFNOR de 1961 : la notation **In**. Avec un succès cependant très relatif : la notation **log** est encore aujourd'hui utilisée dans plusieurs branches des mathématiques (notamment en théorie des nombres), ainsi que dans plusieurs langages de programmation*.

* par exemple dans Python où, avec le module `math`, `log(x)` renvoie le logarithme népérien de x .

2 Lire en ligne (pages 36/37) : gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k92729z/f71.double.mini.

3 Lire en ligne : books.google.fr/books?id=7jMVAAAAQAAJ.

4 Aussi connu sous son nom allemand **Niklaus Kauffman**.