T$^{\text{le}}$ spé

GÉOMÉTRIE VECTORIELLE DANS L'ESPACE

« Dieu sait quelles métaphysiques et géométries l'invention des miroirs et des vitres a pu engendrer chez les mouches ! »

Paul Valéry

Rappels de Première

cours → p.56

9 exercices corrigés → p.57

tsm-gvde-rap-fb

tsm-gvde-rap-sf

I. Vecteurs, droites et plans de l'espace

I.1 Vecteurs de l'espace

La notion de vecteur vue en géométrie plane se généralise à l'espace.

À tout couple $(A;B)$ de points de l'espace, on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$, associé à la translation qui transforme A en B.
Dans l'espace, comme dans le plan, étant donné quatre points A, B, C et D, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si la translation qui transforme A en B transforme C en D, ce qui revient à dire que ABDC est un parallélogramme ou encore que (si A ≠ B et C ≠ D) les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même ***direction*** : (AB) // (CD) ;
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont le même ***sens*** ;
- $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même ***norme*** : AB = CD.

On a alors :

PROPRIÉTÉ

Pour tout point A de l'espace et tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point M de l'espace tel que : $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$.

PROPRIÉTÉS ET DÉFINITIONS (ADMISES)

Les opérations sur les vecteurs de l'espace sont les mêmes que celles sur les vecteurs dans le plan.
→ *addition, relation de Chasles, vecteur nul, multiplication d'un vecteur par un réel, colinéarité…*

DÉFINITION

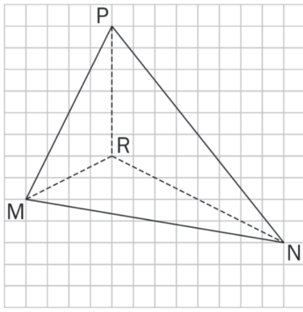
Tout vecteur de la forme $\sum_{i=1}^{n} k_i \vec{u_i}$ est appelé ***combinaison linéaire*** des vecteurs $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, … , $\vec{u_n}$.

Exemple A1

p. 61 SF1

MNPR est un tétraèdre. S est le point de l'espace tel que $\overrightarrow{MS}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MR}+\frac{1}{4}\overrightarrow{RN}$.

U et T sont les points tels que $\overrightarrow{PT}=\frac{3}{4}\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PU}=\frac{3}{4}\overrightarrow{PR}+\frac{3}{4}\overrightarrow{PN}$.



a. Placer les points S, T et U.
b. Exprimer $\overrightarrow{MS}$ en fonction de $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{PN}$.
c. Montrer que $\overrightarrow{TS}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{PM}+\frac{1}{4}\overrightarrow{PR}+\frac{1}{4}\overrightarrow{PN}$.
d. En déduire une expression de $\overrightarrow{TU}$ en fonction de $\overrightarrow{TS}$.

I.2 Droites de l'espace

DÉFINITION

Soient A et B deux points distincts de l'espace.

La ***droite*** (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires :

$$(AB) = \{M, \exists\, k \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM}=k\,\overrightarrow{AB}\}.$$

I.3 Plans de l'espace

DÉFINITION

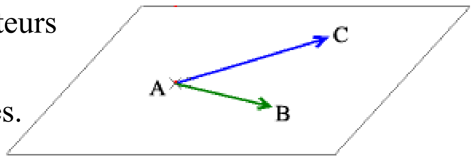
Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace. Le ***plan*** (ABC) est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AM}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$(ABC) = \{M, \exists\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\}.$$

On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des ***vecteurs directeurs*** du plan (ABC).

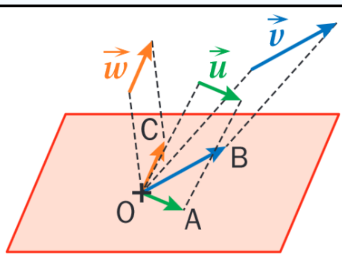
Remarques : – un plan possède une infinité de couples de vecteurs directeurs, qui définissent sa direction ;

– un plan peut être défini par un point et deux vecteurs non colinéaires.



DÉFINITION

Trois vecteurs sont dits ***coplanaires*** s'ils possèdent un représentant dans un même plan.



Hatier, Variations, éd. 2016

PROPRIÉTÉ

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\vec{w}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

<u>Démonstration</u> :

Soit O un point, et les points A, B et C tels que : $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{OC}=\vec{w}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc O, A et B ne sont pas alignés et forment un plan.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ⇔ O, A, B et C sont coplanaires ⇔ C ∈ (OAB)

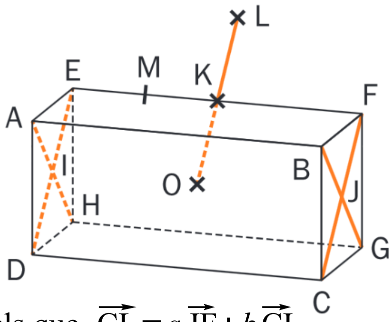
⇔ il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$

⇔ il existe des réels x et y tels que $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$.

<u>EXEMPLE A2</u>

p. 63 SF2

ABCD est un pavé droit de centre O.
I et J sont les centres respectifs des faces AEHD et BFGC. K est le milieu de [EF] et M celui de [EK].
L est le symétrique de O par rapport à K.



1. Montrer que I, M et L sont alignés.

2. a. Montrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que $\overrightarrow{CL}=a\overrightarrow{JF}+b\overrightarrow{CI}$.

b. Que peut-on conclure sur $\overrightarrow{CL}$, $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{JF}$.

3. Démontrer que $\overrightarrow{CL}$, $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ sont coplanaires.

4. Conclure sur la position des points C, I, L et J.

II. Positions relatives de droites et plans

II.1 Positions relatives de deux droites

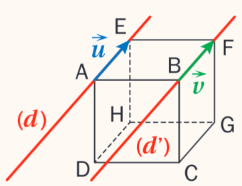
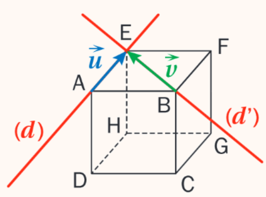
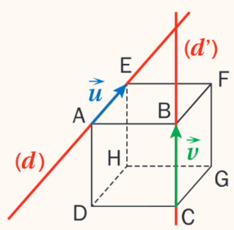
DÉFINITIONS

Deux droites de l'espace sont dites :

- ***coplanaires*** si elles sont contenues dans le même plan ;
- ***parallèles*** si elles sont contenues dans le même plan et si elles sont parallèles dans ce plan ;
- ***non coplanaires*** s'il n'existe aucun plan contenant ces deux droites.

PROPRIÉTÉ (ADMISE)

Soient (d) et (d') deux droites distinctes. Les configurations suivantes sont les seules possibles :

Droites coplanaires		Droites non coplanaires
Droites parallèles	Droites sécantes	
		
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires	

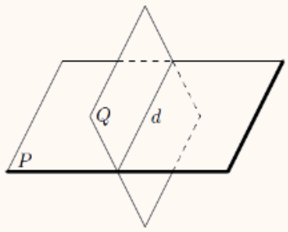
Hatier, Variations, éd. 2016

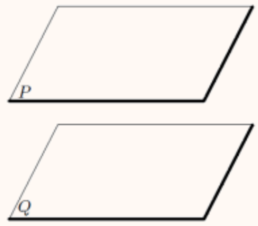
II.2 Positions relatives de deux plans

PROPRIÉTÉ (ADMISE)

Soient P et Q deux plans distincts. Les configurations suivantes sont les seules possibles :

- les plans ont un point commun, alors ils sont ***sécants*** suivant une droite passant par ce point[1];
- ils n'ont aucun point commun, alors ils sont ***parallèles***.





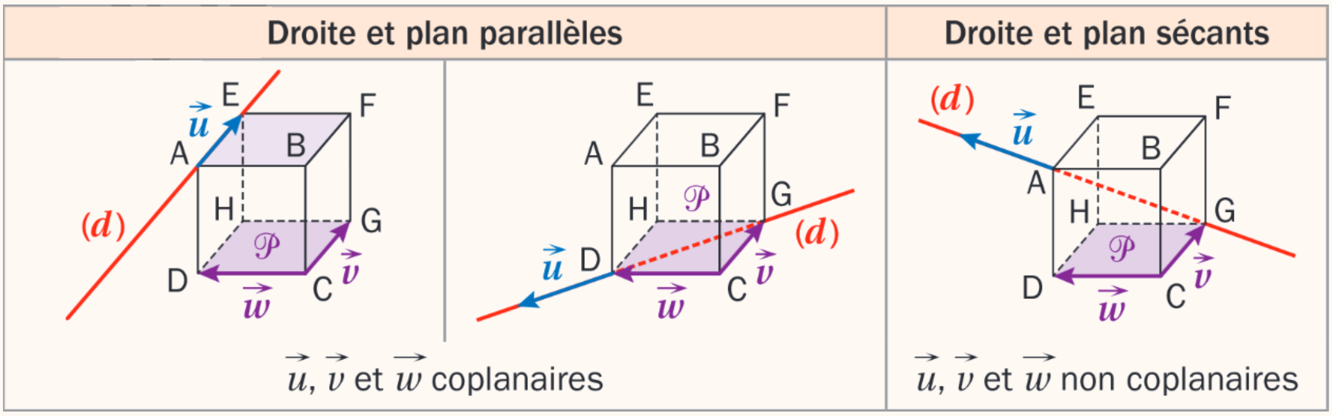
PROPRIÉTÉ (ADMISE)

Deux plans dirigés par un même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

II.3 Positions relatives d'une droite et d'un plan

PROPRIÉTÉ (ADMISE)

Soient $\mathscr{P}$ un plan et (d) une droite de l'espace. Les configurations suivantes sont les seules possibles :



Hatier, Variations, éd. 2016

EXEMPLE A3

Corrigé en vidéo : mathemathieu.fr/tsm-gvde-exa3

p. 65 SF3

ABCDEFGH est un cube.

1. M est le milieu de [EF] et N est le symétrique de M par rapport à E.
Faire une figure et montrer que (MGC) et (NHD) sont parallèles.

2. I et J sont les points de l'espace tels que $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{HE}$.

On admet que $\overrightarrow{EJ}=\overrightarrow{EH}+\frac{3}{4}\overrightarrow{HE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{EH}$.

a. Montrer que $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BF}$.

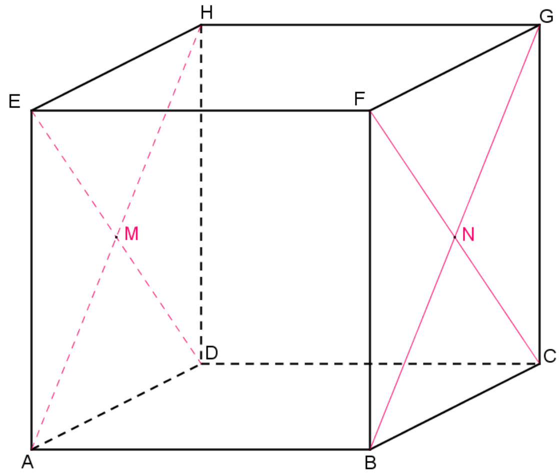
b. En déduire la position de la droite (IJ) par rapport au plan (FDB).

1 Ainsi, deux plans distincts qui ont 2 points communs sont sécants suivant la droite définie par ces deux points.

Exemple C1

On considère un cube ABCDEFGH.

Sur la représentation du cube en perspective cavalière ci-contre, on a dessiné le point M, centre du carré ADHE, et le point N, centre du carré BCGF.



Partie A

Pour chaque proposition, dire si elle vous semble vraie ou fausse, en cochant une des cases.

(AB) et (EH) sont coplanaires	☐ vrai	☐ faux
(AH) et (DG) sont sécantes	☐ vrai	☐ faux
(AN) et (EN) sont coplanaires	☐ vrai	☐ faux
(AB) et (GF) sont parallèles	☐ vrai	☐ faux
(DG) et (EM) sont sécantes	☐ vrai	☐ faux
(BH) et (NA) sont coplanaires	☐ vrai	☐ faux

Partie B

Compléter le tableau ci-dessous, en indiquant l'ensemble d'intersection des deux plans.

Une réponse fausse n'enlève pas de point.

Exemple : les plans (HGF) et (FGC) sont sécants en (FG) ; leur ensemble d'intersection est donc la droite (FG).

intersection ☞	Ø	un point		une droite		un plan	
(HGF) et (FGC)	☐	☐		☒	(FG)	☐	
(EGH) et (FBH)	☐	☐		☐		☐	
(MEH) et (FBN)	☐	☐		☐		☐	
(MDH) et (HEA)	☐	☐		☐		☐	
(HGA) et (EFD)	☐	☐		☐		☐	
Même consigne, cette fois en indiquant l'ensemble d'intersection de la droite et du plan.							
(AE) et (BGH)	☐	☐		☐		☐	
(DM) et (DCG)	☐	☐		☐		☐	
(EF) et (HGF)	☐	☐		☐		☐	
(AC) et (EFG)	☐	☐		☐		☐	

III. Repères de l'espace

DÉFINITION

Une ***base*** de l'espace est un triplet de vecteurs non coplanaires.

Un ***repère*** de l'espace est formé d'un point (origine du repère) et d'une base.

On le note souvent $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

PROPRIÉTÉ

Soit $(\vec{\mathrm{i}},\vec{\mathrm{j}},\vec{k})$ une base de l'espace. Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet $(x;y;z)$ de nombres réels tels que : $\vec{u}=x\,\vec{\mathrm{i}}+y\,\vec{\mathrm{j}}+z\,\vec{\mathrm{k}}$.

Autrement dit, tout vecteur de l'espace peut se décomposer suivant trois vecteurs non coplanaires.

DÉFINITIONS

On dit que $(x;y;z)$ sont les ***coordonnées*** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\mathrm{i}},\vec{\mathrm{j}},\vec{k})$.

Dans le repère $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, si $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, on dit que x est ***l'abscisse***, y est ***l'ordonnée*** et z est la ***cote*** du point M.

Démonstration : Démonstration en vidéo (< 10 min) : mathemathieu.fr/tsm-gvde-demo-repere ou  p. 68

REMARQUES :

- Lorsque trois vecteurs $\vec{\mathrm{i}}$, $\vec{\mathrm{j}}$ et $\vec{\mathrm{k}}$ ne sont pas coplanaires, aucun de ces trois vecteurs n'est combinaison linéaire des deux autres (par exemple, il n'existe pas deux réels x et y tels que $\vec{\mathrm{k}}=x\,\vec{\mathrm{i}}+y\,\vec{\mathrm{v}}$). On dit alors que $\vec{\mathrm{i}}$, $\vec{\mathrm{j}}$, et $\vec{\mathrm{k}}$ forment une ***famille libre*** ou que les vecteurs sont ***linéairement indépendants***.
- Dans le cas où des vecteurs ne sont pas linéairement indépendants, on dit qu'ils sont ***linéairement dépendants***, ou qu'ils forment une ***famille liée***.
- Ces notions abordées constituent les fondements de l'***algèbre linéaire***, très largement développés dans l'enseignement supérieur.

Tous les résultats de la géométrie plane concernant les coordonnées s'étendent à l'espace par l'adjonction d'une troisième coordonnée :

PROPRIÉTÉS

Soit <u>un repère quelconque de l'espace</u>.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x;y;z)$ et $(x';y';z')$ alors :
  - pour tout réel λ , le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées $(\lambda x;\lambda y;\lambda z)$
  - le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x+x';y+y';z+z')$.
- Si A et B sont deux points de coordonnées respectives $(x_\mathrm{A};y_\mathrm{A};z_\mathrm{A})$ et $(x_\mathrm{B};y_\mathrm{B};z_\mathrm{B})$ alors :
  - le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour coordonnées $(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A};y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A};z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A})$
  - le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_\mathrm{B}+x_\mathrm{A}}{2};\dfrac{y_\mathrm{B}+y_\mathrm{A}}{2};\dfrac{z_\mathrm{B}+z_\mathrm{A}}{2}\right)$.

Quelques démonstrations : on note $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère.

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B \vec{i} + y_B \vec{j} + z_B \vec{k}) - (x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k}) = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$
d'où les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

- Pour tout point M de l'espace : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ (facile… avec la relation de Chasles)
donc avec $M = O$: $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OI}$
donc $\frac{1}{2}(x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k} + x_B \vec{i} + y_B \vec{j} + z_B \vec{k}) = x_I \vec{i} + y_I \vec{j} + z_I \vec{k}$
donc $\frac{x_A + x_B}{2}\vec{i} + \frac{y_A + y_B}{2}\vec{j} + \frac{z_A + z_B}{2}\vec{k} = x_I \vec{i} + y_I \vec{j} + z_I \vec{k}$
d'où la propriété du milieu.

Exemple A4

p. 67 SF4

$A(-2;8;9)$, $B(-4;4;5)$, $C(0;4;-3)$, $D(-8;6;7)$ et $E(1;-2;3)$ sont des points de l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note I et J les milieux respectifs de [AB] et [DC].

a. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

b. Calculer les coordonnées des points I et J.

c. Calculer les coordonnées du point L tel que $\overrightarrow{BL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

d. Montrer que I, J, L et E sont coplanaires.

Exemple A5

tsm-gvde-exa5-cor

Dans un cube ABCDEFGH, démontrer que le point P symétrique de D par rapport à C appartient au plan (BEG) en utilisant :
a) le calcul vectoriel.
b) les coordonnées.
c) des positions relatives.

→ BILAN DU CHAPITRE & TRAVAIL EN AUTONOMIE ←

- Fiche bilan → p.70
- QCM 13 questions corrigées → p.71
- Exercices corrigés → 35 à 45 p.72
- 2 exercices type Bac guidés & corrigés → 152 et 153 p.86

- Méthodes et exercices corrigés en vidéo :
  → maths-et-tiques : tsm-gvde-ym