Tle spé

# SUITES ET RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

*« Un voyage de mille lieues commence toujours par un premier pas. »*
*Lao Tseu, env. -600 av. J.-C.*

## Rappels de Première

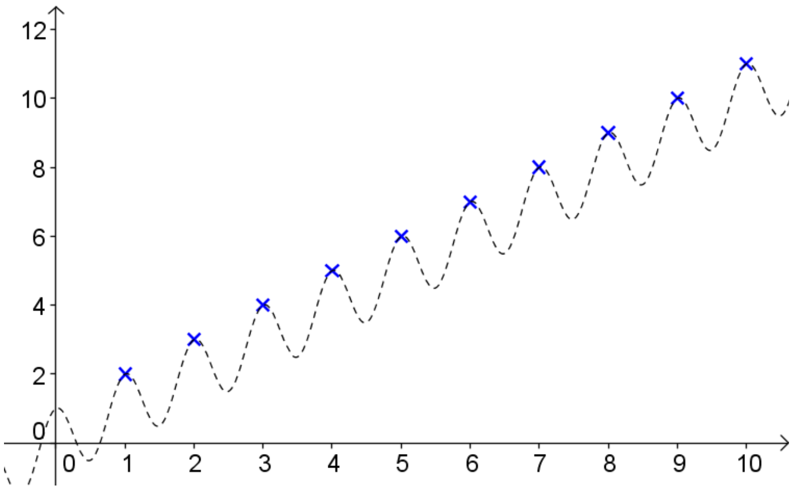
cours → p.154
13 exercices corrigés → p.155

tsm-srr-rap-fb1 tsm-srr-rap-fb2
tsm-srr-rap-sf1 tsm-srr-rap-sf1
tsm-srr-rap-13exos tsm-srr-rap-13exos-cor

Méthodes pour étudier le sens de variations d'une suite $(u_n)$ :

- si la suite est de la forme $u_n = f(n)$, son sens de variations est celui de la fonction $f$
- on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$
- si tous les termes $u_n$ sont strictement positifs ou négatifs, on compare le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.

**Attention** : la condition est suffisante, mais pas nécessaire, c'est-à-dire que la suite peut être croissante alors que la fonction ne l'est pas. Par exemple : la fonction $f$ définie par $f(x) = \cos(2\pi x) + x$ n'est pas croissante mais $u_n = \cos(2\pi n) + n = 1 + n$ est croissante !




/!\ *Attention* /!\ si $(u_n)$ est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, la monotonie de $f$ n'assure pas celle de $(u_n)$.

## Question d'introduction

La proposition « $n^{17}+9$ et $(n+1)^{17}+9$ n'ont pas de facteur commun » est-elle vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ?

Le caractère essentiel du raisonnement par récurrence c'est qu'il contient, condensés pour ainsi dire en une formule unique, une infinité de syllogismes.
Pour qu'on s'en puisse mieux rendre compte, je vais énoncer les uns après les autres ces syllogismes qui sont, si l'on veut me passer l'expression, disposés en cascade.
Ce sont bien entendu des syllogismes hypothétiques.
Le théorème est vrai du nombre 1.
Or s'il est vrai de 1, il est vrai de 2.
Donc il est vrai de 2.
Or s'il est vrai de 2, il est vrai de 3.
Donc il est vrai de 3, et ainsi de suite.
On voit que la conclusion de chaque syllogisme sert de mineure au suivant.
De plus les majeures de tous nos syllogismes peuvent être ramenées à une formule unique.
Si le théorème est vrai de n − 1, il l'est de n.
[…] Cette suite de syllogismes qui ne finirait jamais se trouve ainsi réduite à une phrase de quelques lignes.
[…] Si au lieu de montrer que notre théorème est vrai de tous les nombres, nous voulons seulement faire voir qu'il est vrai du nombre 6 par exemple, il nous suffira d'établir les 5 premiers syllogismes de notre cascade ; il nous en faudrait 9 si nous voulions démontrer le théorème pour le nombre 10 ; il nous en faudrait davantage encore pour un nombre plus grand ; mais quelque grand que soit ce nombre nous finirions toujours par l'atteindre, et la vérification analytique serait possible.
Et cependant, quelque loin que nous allions ainsi, nous ne nous élèverions jamais jusqu'au théorème général, applicable à tous les nombres, qui seul peut être objet de science. Pour y arriver, il faudrait une infinité de syllogismes, il faudrait franchir un abîme que la patience de l'analyste, réduit aux seules ressources de la logique formelle, ne parviendra jamais à combler.

Henri Poincaré, *La Science et l'Hypothèse* (1902)

Henri Poincaré (1854 – 1912) est un mathématicien, physicien théoricien français, considéré comme un des derniers grands savants universels, maîtrisant l'ensemble des branches des mathématiques de son époque et certaines branches de la physique. Il a réalisé des travaux d'importance majeure en optique et en calcul infinitésimal, et c'est un fondateur de l'étude qualitative des systèmes d'équations différentielles et de la théorie du chaos ; il est aussi un précurseur majeur de la théorie de la relativité restreinte et de la théorie des systèmes dynamiques.

*« **Le raisonnement par récurrence est un instrument qui permet de passer du fini à l'infini**. »*
Henri Poincaré, *La Science et l'Hypothèse* (1902)

*si l'on sait monter sur le premier barreau d'une échelle*
*et si l'on sait toujours passer d'un barreau au barreau suivant,*
*alors on peut atteindre tous les barreaux de l'échelle.*

**RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE**

Soit $\mathrm{P}(n)$ une propriété relative à un entier naturel $n$.
Si : • $\mathrm{P}(0)$ est vraie (***initialisation***)
• pour tout entier naturel $n$, si $\mathrm{P}(n)$ est vraie alors $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie (***hérédité***)
alors $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

***Démonstration*** : admise, voir explications du professeur. Ce théorème est un axiome dans certaines théories[1].

/!\ **L'initialisation est importante.** Une propriété peut être héréditaire sans pour autant être vraie.
Par exemple avec $\mathrm{P}(n)$ : « $2^n$ est divisible par 3 ».

1 Dans l'axiomatique ordinale, on suppose (entre autres, voir plus bas) qu'il existe un ensemble $\mathbb{N}$ non vide, muni d'une relation d'ordre $\leqslant$ telle que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément. On démontre alors, par l'absurde, que si l'on a une propriété $\mathrm{H}_n$ avec $\mathrm{H}_0$ qui est vraie, et si pour n'importe quel entier $k$, $\mathrm{H}_k$ vraie implique $\mathrm{H}_{k+1}$ vraie, alors la propriété $\mathrm{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. → démonstration faite en classe (voir mathemathieu.fr/tsm-srr-demo)

### Exemple C1

DÉMO. EX.
tsm-srr-demo1
→ 4:30

Démontrons l'***inégalité de Bernoulli*** : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geqslant 1+na$ .
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ . On note P($n$) : "                                        ".

**Initialisation** :

**Hérédité** :

**Conclusion** :

### Exemple A1

tsm-srr-ex2-cor

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0=2$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1}=2u_n-6$ .
Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)$ est strictement décroissante.

### Exemple A2

p. 158 ex.1

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1}=2u_n+1$ .
Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)$ est strictement croissante.

### Exemple A3

p. 158 ex.2

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geqslant n+1$ .

### Exemple A4

p. 158 ex.3

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ .

### Exemples A5 et A6

p. 159 SF1

Démontrer par récurrence les propositions suivantes.

**a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ .

**b)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n+5$ est un multiple de 3.

## → BILAN DU CHAPITRE & TRAVAIL EN AUTONOMIE ←

• Exercices corrigés → 43 à 47 p.170

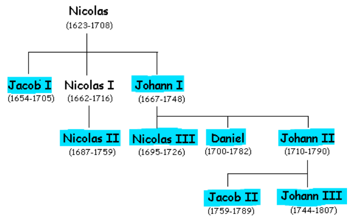
• Un exercice type corrigé (deux suites adjacentes qui convergent vers $\sqrt{2}$ ) → tsm-srr-sar2

• Fiche de 4 exercices corrigés → tsm-srr-4exos et tsm-srr-4exos-corr

# Jacques Bernoulli (1654-1705)

J. Bernoulli, peint en 1687 par son frère Nicolas (1662-1716)

Il n'existe qu'un seul exemple de famille ayant apporté à la science au moins huit mathématiciens de renommée internationale en l'espace de trois générations à peine. Il s'agit des Bernoulli, la plus célèbre famille de scientifiques de tous les temps, dont faisait partie Jacques Bernoulli (Jacob), premier de cette lignée.




Tous ces membres étudièrent à l'université de Bâle (Suisse), où ils habitèrent la majeure partie de leur vie. C'est au sein d'une famille aisée (qui avait fait fortune dans le commerce des épices qu'ils importaient d'Extrême-Orient) et bien établie que naquit Jacques Bernoulli, le 27 décembre 1654.

Il fut l'un des premiers à reconnaître l'importance du calcul différentiel et intégral, à chercher des arguments susceptibles de justifier la pertinence de ses méthodes et à mettre au point des systèmes pour les appliquer à la physique et à la géométrie.

Il s'intéressa à l'un des plus puissants et extraordinaires concepts mathématiques : l'infini. Il proposa de régler les controverses de l'époque à l'aide d'une idée simple et géniale : les quantités infiniment petites n'obéissent pas aux mêmes règles d'opérations que les quantités finies.

Jacques Bernoulli a également travaillé sur la théorie des probabilités, en étant le premier à voir que le calcul des probabilités dépassait l'univers des jeux et des cartes. Ayant constaté que les probabilités pouvaient s'appliquer à tout fait hasardeux dont les chances de réussite pouvaient être calculées, telle l'arrivée ou non d'un bateau frété pour ramener des épices d'Orient, le mathématicien rassemble ces idées dans l'ouvrage qui est tenu pour son chef-d'œuvre, *Ars conjectandi* (*L'Art de conjecturer*). Il y présente la découverte d'une formule du hasard, la fameuse loi des grands nombres, ainsi que la notion d'espérance mathématique, concepts qui sont aujourd'hui à la base de toutes les applications modernes de la théorie des probabilités, notamment pour le calcul des assurances, l'organisation des contrôles de qualité, la conception des expériences ou la distribution optimale des médicaments.

## La vie de Jacques Bernoulli en quelques dates

27/12/**1654**
Jacques Bernoulli naît à Bâle (Suisse), au sein d'une famille de commerçants, Nicolas Bernoulli et Margaretha Schönauer.

27/07/**1667** 12 ans
Naissance de Jean Bernoulli, frère cadet de Jacques ; il se consacrera lui aussi aux mathématiques. Tout d'abord proches collaborateurs, ils deviendront rivaux et même quasiment ennemis.

**1669** ≈ 15 ans
Jacques intègre l'université de Bâle dans l'intention d'y étudier la philosophie et la théologie, selon le désir de son père. Il se sent cependant rapidement attiré par la physique et les mathématiques, sciences auxquelles il finit par se consacrer pleinement.

**1677** ≈ 23 ans
Il entame un journal scientifique, qu'il tiendra tout au long de sa vie et qui fera l'objet d'une publication posthume sous le titre *Meditationes, annotationes, animadversiones theologicae et philosophicae*.

**1678** ≈ 24 ans
Il commence un voyage de cinq ans à travers l'Europe (France, Pays-Bas et Grande-Bretagne), rencontrant de nombreux éminents scientifiques avec lesquels il entretiendra longtemps une correspondance nourrie.

**1682** ≈ 28 ans
Il publie son premier article autour d'une question de mathématiques : il tente d'y analyser l'orbite des comètes.

**1684** ≈ 30 ans
Il accepte une chaire à l'université de Bâle, où il enseigne la physique et les mathématiques. Il épouse Judith Stupanus, avec laquelle il aura un fils et une fille. Contrairement à bien des membres de la famille Bernoulli, les enfants de Jacques ne se tourneront pas vers les sciences.

**1685** ≈ 31 ans
Son journal scientifique enregistre la découverte de la loi des grands nombres, laquelle ne sera cependant publiée qu'après sa mort.

**1691** ≈ 37 ans
Il publie le premier une série de quatre travaux sur la géométrie, dont deux portent sur la spirale logarithmique : les caractéristiques de cette courbe l'impressionnent tant qu'il la baptise « spirale miraculeuse » et demande qu'une représentation en soit apposée sous son épitaphe.

**1696** ≈ 42 ans
Il résout le problème de la courbe bratistochrone et pose les prémices du calcul des variations.

16/08/**1705** 50 ans
Il s'éteint à Bâle.

**1713**
Son œuvre majeure, *Ars conjectandi* (*L'Art de conjecturer*), est publiée à titre posthume. Entre autres découvertes, elle contient des applications de la théorie des probabilités et la définition de ce que nous appelons aujourd'hui « nombres de Bernoulli ».

Source principale : *Bernoulli, La découverte de la loi des grands nombres*, Collection « Génies des mathématiques », 2018