

RENDRE LE SUJET AVEC VOTRE COPIE

**MATHÉMATIQUES : DEVOIR SURVEILLÉ 3**

MERCREDI 13 FÉVRIER 2019

Durée de l'épreuve : 1 h 50. **Calculatrice autorisée.**

**PRÉSENTATION & NOTATIONS**

Résultats mal mis en valeur... très méchant sera le correcteur !

**EXERCICE 1**

10 minutes

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions suivantes, **une ou plusieurs réponses** sont exactes.

Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse enlève 0,25 point..

L'absence de réponse à une question ne rapporte et n'enlève aucun point.

Pour répondre, vous **cochez** ci-dessous la ou les bonnes réponses.

1. Pour tout réel  $x$ , on a :

$e^{\ln x} = x$

$\ln(e^x) = x$

$(\ln e)^x = x$

2. Pour tous réels  $a$  et  $b$  strictement positifs :

$\frac{\ln(e^a)}{\ln b} = \ln(e^a - b)$

$\ln\left(\frac{e^a}{b}\right) = a - \ln b$

$\frac{\ln a}{\ln b} = \frac{a}{b}$

3. L'ensemble solution de l'équation  $2\ln(x) - 3 = 0$  est :

$\{e^{\frac{3}{2}}\}$

$\{\frac{e^3}{2}\}$

$\{\sqrt{e^3}\}$

4. L'ensemble solution de l'inéquation  $\frac{3}{e^x} - (e^x)^2 \geq 0$  est :

$\left]-\infty; \frac{\ln 3}{3}\right]$

$\left[\frac{\ln 3}{3}; +\infty\right[$

$\left]-\infty; \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right]$

5. La solution exacte de l'équation  $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{2}{3}$  est :

0,369

$\ln 2$

$1 - \frac{\ln 2}{\ln 3}$

$3 \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

**EXERCICE 2**

10 minutes

Les écritures suivantes, sauf une, représentent le même nombre : déterminer l'intrus.

Justifier votre réponse en détaillant les calculs.

$\ln(e^3)$  ;  $\ln e + \ln e + \ln e$  ;  $2(\ln e + \ln(\sqrt{e}))$  ;  $\ln\left(\left(\frac{e}{2}\right)^2\right) + 1 + \ln 4$  ;  $\ln(3e)$ .

**EXERCICE 3**

20 minutes

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  chaque équation (*penser à déterminer l'ensemble sur lequel est définie chaque équation*).

a)  $-e^{7x} + 1 = 3e^{-7x}$

b)  $\ln(1 - 2x) - \ln 2 = \ln(x + 1) + \ln 3$

c)  $2 \ln(x) + \ln 2 = \ln(x) + 3$

**EXERCICE 4**

30 minutes

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0;8]$  par  $f(x) = 2 \ln(x) + x^2 - 5x$ .

1. a) Montrer que la fonction  $f$  est dérivable sur  $]0;8]$ .

b) Montrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0;8]$  on a :  $f'(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x}$ .

2. a) Déterminer le tableau des variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0;8]$ .

b) Montrer que dans l'intervalle  $]0;8]$ , l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$ .

c) À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de la solution  $\alpha$ . Expliquer rapidement votre démarche.

3. a) Déterminer une équation de la tangente  $\mathcal{D}$  à la courbe représentative de la fonction  $f$  au point A d'abscisse 1.

b) Étudier la convexité de la fonction  $f$  sur  $]0;8]$ .

c) Que représente le point A pour la courbe représentative de la fonction  $f$  ? Justifier.

**EXERCICE 5**

30 minutes

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au millième.

Une agence de voyage propose des itinéraires touristiques pour lesquels chaque client effectue un aller et un retour en utilisant soit un bateau, soit un train touristique. Le choix du mode de transport peut changer entre l'aller et le retour.

À l'aller, le bateau est choisi dans 65 % des cas.

Lorsque le bateau est choisi à l'aller, il l'est également pour le retour 9 fois sur 10.

Lorsque le train a été choisi à l'aller, le bateau est préféré pour le retour dans 70 % des cas.

On interroge au hasard un client. On considère les événements suivants :

- A : « le client choisit de faire l'aller en bateau » ;
- R : « le client choisit de faire le retour en bateau ».

1. Traduire cette situation par un arbre pondéré.

2. On choisit au hasard un client de l'agence.

a) Calculer la probabilité que le client fasse l'aller-retour en bateau.

b) Montrer que la probabilité que le client utilise les deux moyens de transport est égale à 0,31.

3. On choisit au hasard 20 clients de cette agence.

On note  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de clients qui utilisent les deux moyens de transport.

On admet que le nombre de clients est assez grand pour que l'on puisse considérer que le tirage est équivalent à un tirage « avec remise ».

a) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

b) Déterminer la probabilité qu'exactly 12 clients utilisent les deux moyens de transport différents.

c) Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins 2 clients qui utilisent les deux moyens de transport différents.

4. Le coût d'un trajet aller ou d'un trajet retour est de 1 560 € en bateau ; il est de 1 200 € en train. On note  $Y$  la variable aléatoire qui associe, à un client pris au hasard, le coût en euro de son trajet aller-retour.

a) Déterminer la loi de probabilité de  $Y$ .

b) Montrer que l'espérance mathématique de  $Y$  est de 2 932,80 €.

c) Interpréter ce résultat.