

RENDRE LE SUJET AVEC VOTRE COPIE

MATHÉMATIQUES : DEVOIR SURVEILLÉ 2

MERCREDI 15 NOVEMBRE 2017

Durée de l'épreuve : 1 h 50. Calculatrice autorisée.

Un barème (note sur 32) est donné à titre indicatif, et pourra être modifié.
 Un temps indicatif est annoncé pour chaque exercice.
 Si vous le suivez, il vous restera alors 5 min.

EXERCICE 1 ROC 'n' roll

env. 10 min

2,5 pts (1 + 1,5)

On rappelle que si $z = a + ib$ alors le conjugué de z , noté \bar{z} , vérifie : $\bar{\bar{z}} = z$.

Soit z un nombre complexe.

1. Démontrer que : $|z|^2 = z \bar{z}$.

2. Démontrer que $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$.

EXERCICE 2 L'âge du capitaine

env. 15 min

4,5 pts (2,5 + 0,5 + 1,5)

On cherche à savoir à quelle fraction est égal le nombre 32,3232... (avec une infinité de 32).

On note $v_n = 32, \underbrace{32\ 32\ 32 \dots}_{n \text{ fois}}$ avec n répétitions consécutives de 32 après la virgule.

On admet que, pour tout entier naturel : $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{32}{10^{2k}}$ ie $v_n = 32 + \frac{32}{10^2} + \frac{32}{10^4} + \frac{32}{10^6} + \dots + \frac{32}{10^{2n}}$.

Autrement dit, après factorisation, on a : $v_n = 32 \times \sum_{k=0}^n \frac{1}{10^{2k}}$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $\sum_{k=0}^n \frac{1}{10^{2k}} = \frac{100}{99} \left(1 - \frac{1}{100} \left(\frac{1}{100} \right)^n \right)$.

2. En déduire v_n en fonction de n .

3. Sans justifier, donner la limite de la suite (v_n) .

En déduire à quelle fraction est égal 32,3232... (avec une infinité de 32).

EXERCICE 3 No limit

env. 15 min

5 pts (0,5 + 2 + 1 + 1,5)

1. Déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_n = \left(\frac{1}{3} \right)^n - \sqrt{n+2}$.

2. Déterminer la limite éventuelle de la suite (x_n) définie sur \mathbb{N} par : $x_n = \frac{2n^5 + 3n^3 - 4}{3n^4 + 2n^2 - 4}$.



3. On considère la suite (v_n) définie sur \mathbb{N}^* par : $v_n = \frac{(-1)^n \sin(n)}{n-2}$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n : $-1 \leq (-1)^n \sin(n) \leq 1$.

b) En déduire la limite de la suite (v_n) .

EXERCICE 4

Le classico

env. 40 min

12 pts (2,5 + 2 + 0,5 + 1 + 1 + 1,5 + 0,5 + 1,5 + 1,5)

Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 3 - \frac{4}{u_n + 1}$.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = 3 - \frac{4}{x+1}$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $1 < u_n \leq 4$.

2. a) Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

b) Que peut-on en déduire ?

3. On souhaite disposer d'un algorithme permettant de calculer n'importe quel terme de cette suite, pour un entier n supérieur ou égal à 1. Lequel des deux algorithmes ci-dessous permet d'atteindre cet objectif ?

Justifier votre réponse.

Algorithme 1

```
Afficher "Entrez la valeur de u(0)"
Lire U
Afficher "Entrez la valeur de rang n (au moins 1)"
Lire N
Pour i allant de 0 à N :
    U prend la valeur 3 - 4/(U+1)
Afficher U
```

Algorithme 2

```
Afficher "Entrez la valeur de u(0)"
Lire U
Afficher "Entrez la valeur de rang n (au moins 1)"
Lire N
Pour i allant de 0 à N-1 :
    U prend la valeur 3 - 4/(U+1)
Afficher U
```

4. La courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation $y=x$ sont tracées page suivante.

Y représenter graphiquement les 5 premiers termes de la suite (u_n) : u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 .

Laisser les traits de construction.

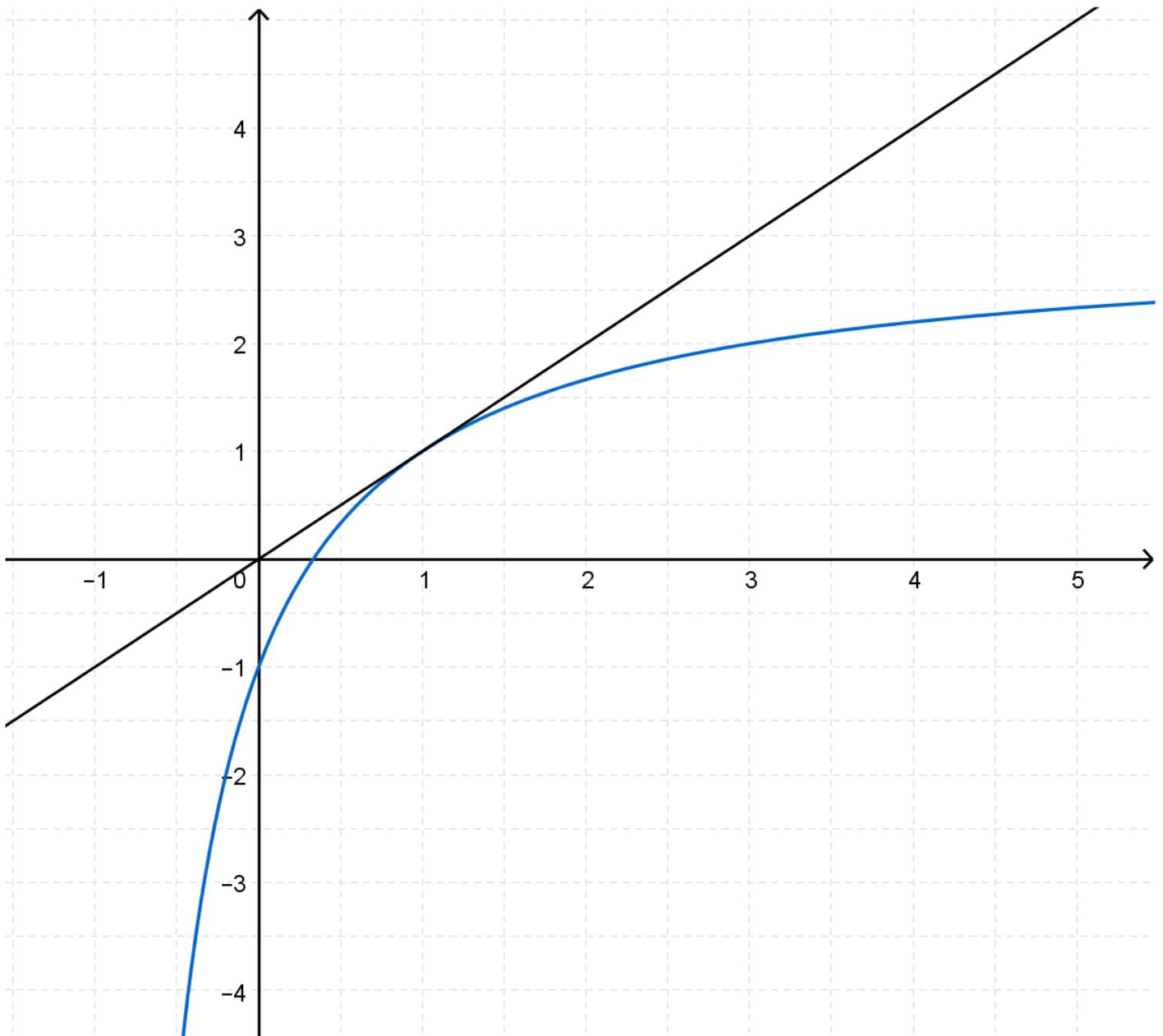
5. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n : $v_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}n$.

c) Utilisez ce résultat pour trouver l'expression de u_n en fonction de n .

d) En déduire la limite de la suite (u_n) .



EXERCICE 5

La réunionite complexe

env. 10 min

4 pts (1 + 1 + 2)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère le point A d'affixe $1+i$.

On associe, à tout point M du plan d'affixe z , le point M' d'affixe $z' = \frac{z-1-i}{z}$.

Le point M' est appelé l'image du point M.

1. Déterminer, sous forme algébrique, l'affixe du point B' , image du point B d'affixe i .
2. Montrer que, pour tout point M du plan d'affixe z (non nulle), l'affixe z' du point M' est telle que :
 $z' \neq 1$.
3. Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z (non nulle) pour lesquels l'affixe du point M' est telle que $|z'|=1$.



Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe : $f(z) = -3z^2 + 2z - 9$.

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = -5$.

2. Soit z un nombre complexe tel que $z = x + iy$ où x et y sont des réels.

On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel. Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.

Pour terminer ce devoir, deux citations sur la beauté et le bonheur, ainsi qu'une formule orgasmique :

« Il est difficile de rendre la beauté visible. Les gens ne reconnaissent que ses caricatures. »

Jean COCTEAU / Journal (1942-1945)

« Melville raconte qu'il habitait une maison d'où il voyait sur la montagne une autre maison, lointaine, lointaine, où semblait habiter le bonheur. Il y alla et, de ce point élevé, il vit la sienne à l'horizon. Et ce fut la sienne, à ce moment là, qui lui donna cette impression.

Le bonheur n'est jamais qu'en face. »

Alexandre VIALATTE / Chroniques de La Montagne (2) / Robert Laffont - Bouquins 2000

J. Minac et C. Willans ont imaginé une remarquable formule qui donne tous les nombres premiers à la suite et sans répétition.

Avant sa publication, en 1995, peu de gens imaginaient qu'une telle formule pouvait exister :

$$p_n = 1 + \sum_{m=1}^{2^n} \left[\frac{n}{1 + \sum_{j=2}^m \left[\frac{(j-1)! + 1}{j} - \left\lfloor \frac{(j-1)!}{j} \right\rfloor \right]} \right]^{\frac{1}{n}}$$

