

RENDRE LE SUJET AVEC VOTRE COPIE DEDANS

MATHÉMATIQUES : DEVOIR SURVEILLÉ 1

MERCREDI 26 SEPTEMBRE 2018

Durée de l'épreuve : 1 h 50. Calculatrice autorisée.

Un barème (**note sur 36**) est donné à titre indicatif, et pourra être modifié.
Chaque point sur 36 représente donc environ 0,6 point sur 20.

Un temps indicatif par exercice est proposé : si vous respectez les durées, il vous restera environ 15 minutes pour vous relire, etc.

PRESENTATION & NOTATIONS 1 point

Résultats mal mis en valeur... très méchant sera le correcteur !

EXERCICE 1 11 points (2,5 + 2 + 1,5 + 1 + 1 + 2,5 + 0,5) env. 30 min

On donne la suite (u_n) définie par $u_0=3$ et $u_{n+1}=\frac{4}{3}u_n-2$.

On souhaite étudier de deux manières différentes la monotonie de (u_n) .

1. Première méthode

On considère la suite définie sur \mathbb{N} par : $v_n=u_n-6$.

- a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique et exprimer v_n en fonction de n .
- b) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1}-v_n=-\left(\frac{4}{3}\right)^n$. En déduire les variations de la suite (v_n) .
- c) Déterminer les variations de la suite (u_n) .
- d) Déterminer u_n en fonction de n .

2. Deuxième méthode

- a) Démontrer que : $u_{n+1}<u_n \Leftrightarrow u_n<6$.
- b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n<6$.
- c) En déduire les variations de la suite (u_n) .

EXERCICE 2 4 points env. 10 min

Démontrer que, pour tout entier naturel n : $5^{n+2} \geq 4^{n+2} + 3^{n+2}$.

EXERCICE 3 5 points (3 + 2) env. 15 min

1. Étudier le sens de variation de la suite (v_n) définie sur \mathbb{N}^* par $v_n=\frac{-3^n}{n}$.

2. Calculer la somme suivante : $\sum_{k=1}^{101} (-3k+1)$.

EXERCICE 4 4 points (1+1+2)

env. 10 min

Sur le site www.sciencesetavenir.fr, on peut lire :

« Apple a vendu 50,76 millions d'exemplaires de l'iPhone en 2017, au cours du trimestre janvier-mars, contre 51,19 millions un an auparavant et alors que les analystes financiers prévoient en moyenne des ventes de 52,27 millions d'unités. »

1. a) Déterminer une valeur approchée, à 0,01 % près, du taux d'évolution des ventes d'iPhone entre le premier trimestre 2016 et le premier trimestre 2017.

b) On suppose dans la suite de l'exercice que la baisse des ventes d'iPhone va se poursuivre.

On note u_n le nombre d'iPhone vendus (en millions) durant le premier trimestre de l'année $2017+n$.

Démontrer que pour tout entier naturel n : $u_n = 50,76 \times 0,9916^n$.

2. Selon ce modèle, et en considérant que les ventes d'iPhone sont les mêmes à chaque trimestre d'une année, combien de millions d'iPhone auront été vendus entre l'année 2017 et l'année 2050 (ces deux années incluses) ? *On arrondira le résultat au million près.*

EXERCICE 5 11 points (2+1+2+1+2+1+2)

env. 30 min

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = -3 \text{ et } u_{n+1} = \frac{-u_n + 2}{3u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On note f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{-x+2}{3x}$.

1. La courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation $y=x$ sont tracées page suivante. Y représenter graphiquement les 7 premiers termes de la suite (u_n) : $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$ et u_6 . Laisser les traits de construction.

2. a) Calculer u_1 et u_2 .

b) (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ? Justifier.

3. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - \frac{2}{3}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n : $v_n \neq 1$.

b) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{2}{3}$.

c) En déduire v_n en fonction de n .

d) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 5 question 1

