

Pré-requis : suite récurrente + rais. par récurrence (pour Hanoï)
et somme des termes d'une suite géométrique (pour Sissa)

I. Les tours de Hanoï	1
I.1 Le jeu est la forme la plus élevée de la recherche (Albert Einstein)	3
I.2 Mais alors, c'est pour quand la fin des mondes ? o_O	4
II. La légende de Sissa	5
II.1 Du Roi-Soleil au Bien-Aimé, en passant par Frénet et Sissa	5
II.2 Lucas était-il un des trésoriers du Roi des Indes ?	8

I. Les tours de Hanoï

Le problème mathématique des tours de Hanoï a été inventé par Édouard Lucas. Il est publié dans le tome 3 de ses *Récréations mathématiques*, parues à titre posthume en 1892. Il annonce que ce problème est dû à un de ses amis, *N. Claus de Siam*, prétendument professeur au collège de *Li-Sou-Stian* (une double anagramme de *Lucas d'Amiens*, sa ville de naissance, et *Saint Louis*, le lycée où Lucas enseignait).

Sous le titre « *Les brahmes¹ tombent* », Lucas relate que « *N. Claus de Siam a vu, dans ses voyages pour la publication des écrits de l'illustre Fer-Fer-Tam-Tam, dans le grand temple de Bénarès, au-dessous du dôme qui marque le centre du monde, trois aiguilles de diamant, plantées dans une dalle d'airain, hautes d'une coudée et grosses comme le corps d'une abeille. Sur une de ces aiguilles, Dieu enfila au commencement des siècles, 64 disques d'or pur, le plus large reposant sur l'airain, et les autres, de plus en plus étroits, superposés jusqu'au sommet. C'est la tour sacrée du Brahmâ. Nuit et jour, les prêtres se succèdent sur les marches de l'autel, occupés à transporter la tour de la première aiguille sur la troisième, sans s'écarter des règles fixes que nous venons d'indiquer, et qui ont été imposées par Brahma. Quand tout sera fini, la tour et les brahmes tomberont, et ce sera la fin des mondes !*

Un jeu est donc tiré de cette histoire, le jeu des tours de Hanoï, consistant à déplacer des disques de diamètres différents d'une tour de départ à une tour d'arrivée en passant par une tour intermédiaire, et ceci en un minimum de coups, tout en respectant les règles suivantes :

- on ne peut déplacer plus d'un disque à la fois,
- on ne peut placer un disque que sur un autre disque plus grand que lui ou sur un emplacement vide.

On suppose que cette dernière règle est également respectée dans la configuration de départ.



¹ Vieilli. De *brahmane* : (Hindouisme) membre de la caste sacerdotale, la première des quatre grandes castes chez les Hindous.



Edouard Lucas, issu d'une famille modeste (son père est artisan tonnelier à Amiens), est né à Amiens le 4 avril 1842 ; il y commencera ses études à l'école des Frères avant d'intégrer le lycée impérial de la ville (actuel lycée Louis Thuillier). Il reçoit une bourse communale et réussit le concours d'entrée à l'École Normale Supérieure (ENS), en 1861 : sur les 19 admis en section scientifique de l'ENS, Lucas occupe en 1861 le sixième rang, Gaston Darboux étant major cette année là.

A sa sortie de l'école il devient astronome adjoint à l'Observatoire de Paris.

Durant la guerre franco-prussienne de 1870 (annexion par le Reich du territoire d'Alsace-Moselle, dit Alsace-Lorraine), il s'engage volontairement et effectue tous les combats qui se livrent depuis la reprise d'Orléans, de Blois et du Mans ; il est alors porté deux fois pour la croix de la Légion d'Honneur.

Suite à des travaux arithmétiques concernant la réalisation d'armures de satins réguliers en parallèle avec Edouard Gand, il obtient une chaire en Mathématiques Spéciales à Moulins, de 1872 à 1876.

Puis il occupe une chaire à Paris, d'abord au lycée Charlemagne à Paris, puis au déjà très prestigieux lycée Saint-Louis.

La plupart de ces travaux sont de nature arithmétique (théorie des nombres).

Sa principale contribution est celle faite au test de primalité d'un nombre, aujourd'hui dit de « Lucas-Lehmer² », qui est encore couramment utilisé de nos jours pour battre des records de grands nombres premiers. Ces travaux prennent une importance particulière depuis que l'avènement de l'informatique rend la cryptographie avide de très grands nombres premiers.

En 1876, il prouve avec sa méthode que le nombre de Mersenne³ $2^{127} - 1$ est premier, ce qui reste le plus grand nombre premier découvert sans l'aide d'un ordinateur⁴.

Remarque : $2^{127} - 1 = 170141\ 183\ 460\ 469\ 231\ 731\ 687\ 303\ 715\ 884\ 105\ 727$.

Lors d'un banquet au congrès tenu à Marseille par l'Association française pour l'avancement des sciences, un serveur laissa tomber, en passant près de Lucas, une pile d'assiettes : un morceau d'assiette cassée coupa la joue de Lucas... Quelques jours après, le 3 octobre 1891, il meurt à 49 ans d'érysipèle (inflammation de la peau grave, dermite due à un streptocoque).

2 Le test de primalité de Lucas est remis à jour en 1930 par Derrick Lehmer qui le définit comme suit. On définit une suite d'entiers S_n par la formule $S_2 = 4$, $S_n = (S_{n-1})^2 - 2$ pour $n > 2$.

Les premiers termes sont $S_2 = 4$, $S_3 = 14$, $S_4 = 194$, ...

Le test de primalité de Lucas-Lehmer pour les nombres de Mersenne stipule qu'un nombre de Mersenne $M_p = 2^p - 1$, avec $p > 2$, est premier si et seulement si S_p est divisible par M_p .

Édouard Lucas démontra que S_{127} est divisible par M_{127} , ce qui entraîne que M_{127} est premier. La chose était extrêmement délicate, sachant que M_{127} est très grand et que S_{127} est énorme. Édouard Lucas fit la démonstration sans calculer S_{127} .

3 Un nombre de Mersenne est un nombre de la forme $2^p - 1$ avec p premier

4 En fait, en 1951, juste avant les premiers nombres premiers trouvés par ordinateur, Aimé Ferrier utilise une machine de bureau mécanique et des techniques mathématiques pour améliorer ce record : $\frac{2^{148} + 1}{17}$ est premier (44 chiffres !).

I.1 Le jeu est la forme la plus élevée de la recherche (Albert Einstein)

Il faut aussi en finir avec l'idée fausse que la pratique des mathématiques est déductive.

Résoudre un problème exige une grande part d'intuition, d'imagination, un combat avec soi-même.

Didier Dacunha-Castelle

Joue et tu deviendras sérieux.
Aristote

C'était un homme sérieux, il passait son temps à jouer.
Lewis Carroll

Jeu après jeu, l'enfant devient « je ».
Arnaud Gazagnes

On ne joue pas en assistant à un jeu.
Proverbe baoulé

On peut en savoir plus sur quelqu'un en une heure de jeu qu'en une année de conversation.
Platon

Les rudiments de la connaissance sont assimilés au fil des jeux.
Mahatma Gandhi

1. a) Commençons par jouer à ce jeu, d'abord avec une tour de 4 étages.

Que est le nombre minimal de manipulations pour reconstruire cette tour ?

Si vous le souhaitez, vous pouvez commencer par jouer à cette adresse :

http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/jeux_mat/textes/jeu_hanoi.html

et/ou faire un dessin pour expliquer votre démarche et trouver la réponse.

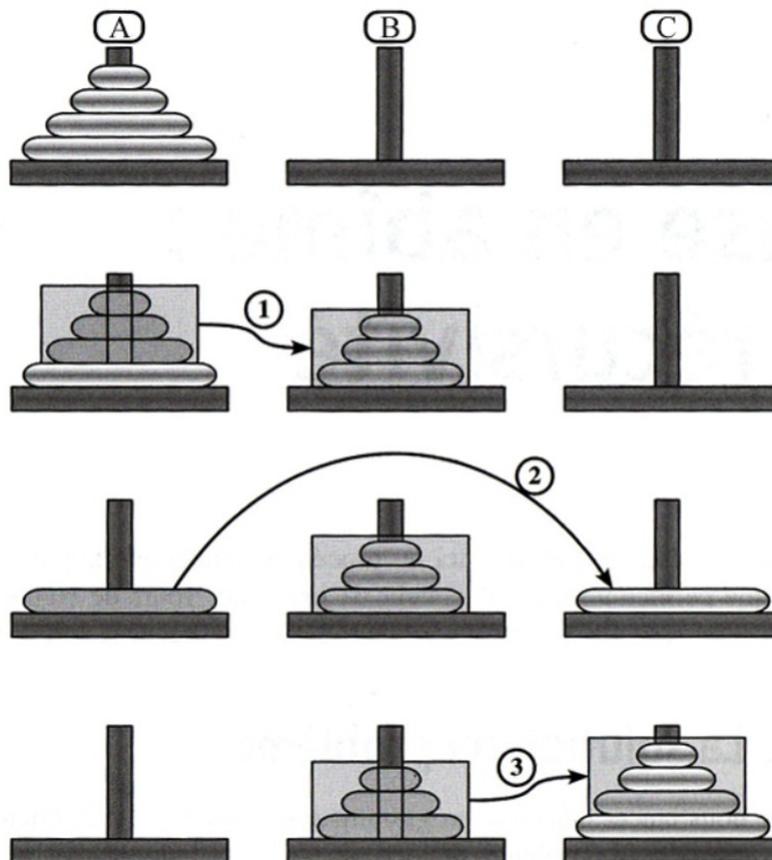
b) Et avec une tour à 5 étages ?

2. On cherche ici le nombre u_n de manipulations nécessaires pour reconstruire une tour de n disques.

a) Déterminer une relation de récurrence, c'est-à-dire exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

Aide : faire un dessin pour $n=2$ puis $n=3$ en essayant de « lier » $n=3$ à $n=2$...

Et si cela vous aide :



Source : <http://www.nymphonath.ch/info/recurisvite/recurisvite.pdf>

b) Conjecturer alors l'expression de u_n en fonction de n , et démontrer votre conjecture.

I.2 Mais alors, c'est pour quand la fin des mondes ? o_O

Revenons au problème posé par Lucas dans « les brahmes tombent ».

Avec 64 disques d'or à déplacer, on se demande combien de temps mettront les prêtres pour déplacer la tour, et que ce soit la fin des mondes (gloups).

Supposons qu'il faille 1 seconde pour déplacer un disque (c'est peu, mais supposons...), au bout de combien de jours la fin des mondes est-elle censée faire tomber les brahmes ?

Pour information, l'âge estimé de l'univers est estimé selon certaines sources à 13,7 milliards d'années.

II. La légende de Sissa

II.1 Du Roi-Soleil au Bien-Aimé, en passant par Frénet et Sissa

Quelques rappels historiques.

Louis XIV « le Grand » ou « **le Roi-Soleil** » (1638-1715) succède à son père sous la régence de sa mère jusqu'à sa majorité, en 1661. Parfaitement éduqué et préparé à sa charge de Roi, c'est un monarque absolu. Il annihile la noblesse en lui ôtant tout pouvoir politique. Il refonde une cour sur le modèle de François Ier, et l'installe dans un Château de Versailles fraîchement agrandi. Louis règne seul, ne réunit jamais les États-Généraux et se trouve progressivement en position de dicter sa loi à l'Europe entière. De cela naissent quatre guerres, dont la Guerre de Succession d'Espagne (1701-1714) qui voit son petit-fils Philippe sacré Roi d'Espagne. Louis persécute les jansénistes et les protestants, et révoque en 1685 l'Édit de Nantes de son grand-père. Louis a vu tous ses enfants et petits-enfants mourir avant lui. Il meurt d'une gangrène à la cuisse, c'est son arrière-petit-fils (5 ans) qui lui succède.

Cet arrière petit-fils, c'est donc **Louis XV** « **le Bien-Aimé** » (1710-1774).

Fils du Petit Dauphin (mort en 1712), petit-fils du Grand Dauphin (mort en 1711) et arrière-petit-fils de Louis XIV, il lui succède sous la régence de Philippe d'Orléans, neveu du roi défunt, jusqu'à sa majorité en 1723. Seul survivant de la famille royale stricto sensu, il bénéficie au début de son règne d'un grand soutien populaire, ce qui lui vaut le surnom de « Bien-Aimé » en 1744 après une maladie qui faillit l'emporter à Metz. Les premières années de son règne se déroulent dans un calme relatif, sous la direction prudente de plusieurs précepteurs, qui lui prodiguent une vaste culture.

[c'est dans ce contexte que nous nous placerons plus bas]

Loin d'avoir reçu l'éducation royale de son illustre bisaïeul, Louis XV n'est pas en contact direct avec la vie politique du pays. Il ne voit que rarement ses ministres et agit souvent à l'encontre de leurs attentes faute de pouvoir leur donner des directives fermes et précises.

Son désintérêt pour la politique et la succession de ministres aux tendances différentes aboutissent à un affaiblissement de l'influence de la France en Europe.

Son règne très libre hérité du régent d'Orléans permet aux jansénistes de s'insérer dans les sphères de l'État. De plus, la Marquise de Pompadour (janséniste) a réussi à ravir le cœur du Roi, qui lui permet de faire avancer les pions de sa congrégation.

Les finances du royaume sont exsangues, le pays est en guerre de manière quasi-constante, les clans grappillent le pouvoir là où ils le peuvent et l'autorité monarchique est au plus mal.

Louis XV a pavé la voie à l'abolition de la royauté, et son règne est considéré comme l'un des plus désastreux de l'Histoire de l'Ancien Régime. Mort de variole, Louis est mené à Saint Denis en catimini et pendant la nuit afin d'éviter les manifestations de dégoût à son encontre.

Sa mort provoque des festivités dans Paris, comme suite à celle de Louis XIV.

Le 24 juillet 1719, le Roi Louis XV (qui a 9 ans et demi) désira lui-même rendre visite à l'Académie des Belles-Lettres, au Louvre. Il demanda à présider lui-même une séance de l'Académie. Les académiciens l'accueillirent à la porte de la Cour carrée, où il arriva dans une chaise à porteurs, et ils le conduisirent solennellement dans la salle des séances et jusqu'au fauteuil de président.

Durant deux heures, parmi les graves membres de l'Académie, le petit roi de neuf ans et demi s'assit et présida de la façon la plus sérieuse et aussi la plus gracieuse. On lui adressa la harangue que voici :

« Sire,

« On sait qu'il est de la grandeur des rois de protéger les lettres ; mais qu'il est beau de voir Votre Majesté se couvrir aujourd'hui d'une gloire plus solide encore, de la gloire de les aimer ! La preuve éclatante qu'elle leur donne de son amour est plus capable de hâter leurs progrès que tous ses autres bienfaits. [...] »

Le jeune Louis répondit très aimablement qu'il recevait avec plaisir les respects et les vœux de l'Académie. Il fut ajouté que Sa Majesté aimerait que la séance se déroulât comme il se faisait dans les assemblées ordinaires.

Un historien et linguiste français, Nicolas Fréret (1688-1749), lut alors, puisque c'était son tour de présenter une communication, une étude sur l'origine du jeu des échecs, sujet bien accordé à la circonstance, puisque le jeu des échecs est un jeu royal et qu'il faisait partie des amusements de Sa Majesté. Le Roi entendit cette dissertation tout entière avec agrément et avant de lever lui-même la séance, il donna à l'Académie, avec une extrême bonté, de nouvelles assurances de sa protection.



Louis XIV, enfant, en costume romain.



Louis XIV en 1661 (23 ans)



Louis XIV, en costume de sacre en 1648



Louis XV en costume de sacre



Louis XV, pastel de Quentin de La Tour, 1748



Louis XV (arrière petit-fils de Louis XIV) et sa fiancée Marie Anne Victoire d'Espagne (fille du roi d'Espagne Philippe V, lui-même petit-fils de Louis XIV)



La marquise de Pompadour par François Boucher (1756)



Nicolas Fréret

Voici une partie du discours que Fréret prononça en présence du Roi de France :

« Les circonstances que les écrivains arabes racontent de la manière dont ce jeu fut inventé aux Indes, et porté ensuite en Perse, méritent quelque attention.

Au commencement du V^e siècle de l'ère chrétienne, il y avait dans les Indes un prince très puissant, dont les états étaient situés vers l'embouchure du Gange. Il prenait le titre fastueux de Roi des Indes. Son père avait contraint un grand nombre de souverains de lui payer un tribut et de se soumettre à son empire. Le jeune monarque oublia bientôt que les rois doivent être les pères de leurs peuples, que l'amour des sujets pour leur roi est le seul appui solide du trône, que cet amour seul peut attacher véritablement les peuples au prince qui les gouverne, et dont ils font toute la force et toute la puissance, qu'un roi sans sujets ne porterait qu'un vain titre, et n'aurait aucun avantage réel sur les autres hommes. Les brahmanes et les rajass, c'est-à-dire les prêtres et les grands seigneurs, représentèrent toutes ces choses au Roi des Indes; mais enivré de l'idée de sa grandeur, qu'il croyait inébranlable, il méprisa leurs sages représentations. Les plaintes et les remontrances ayant continué, il s'en trouva blessé, et pour venger son autorité qu'il crut méprisée de ceux qui osaient désapprouver sa conduite, il les fit périr dans les tourments. Cet exemple effraya les autres. On garda le silence, et le prince abandonné à lui-même, et, ce qui était encore plus dangereux pour lui et plus terrible pour ses peuples, livré aux pernicious conseils de ses flatteurs, se porta bientôt aux derniers excès. Les peuples accablés sous le poids d'une tyrannie insupportable, témoignèrent hautement combien leur était devenue odieuse une autorité qui n'était plus employée qu'à les rendre malheureux. Les princes tributaires, persuadés qu'en perdant l'amour de ses peuples, le Roi des Indes avait perdu tout ce qui faisait sa force, se préparaient à secouer le joug, et à porter la guerre dans ses états. **C'est alors qu'un brahmane, nommé Sissa**, fils de Daher, touché des malheurs de sa patrie, entreprit de faire ouvrir les yeux au prince sur les funestes effets que sa conduite allait produire. Mais instruit par l'exemple de ceux qui l'avaient précédé, il sentit que sa leçon ne deviendrait utile que quand le prince se la donnerait lui-même, et ne croirait point la recevoir d'un autre. Dans cette vue, **il imagina le jeu d'échecs, où le Roi, quoique la plus importante de toutes les pièces, est impuissant pour attaquer et même pour se défendre contre ses ennemis, sans le secours de ses sujets et de ses soldats.**

Le nouveau jeu devint bientôt célèbre. Le Roi des Indes en entendit parler, et voulut l'apprendre. Le brahmane Sissa fut choisi pour le lui enseigner et sous prétexte de lui en expliquer les règles, et de lui montrer **avec quel art il fallait employer les autres pièces à la défense du Roi**, il lui fit apercevoir et goûter des vérités importantes qu'il avait refusées d'entendre jusqu'alors. Le prince, né avec de l'esprit et des sentiments vertueux que les maximes des courtisans n'avaient pu étouffer, se fit l'application des leçons du brahmane, et comprenant que l'amour des peuples pour leur roi fait toute sa force, il changea de conduite, et par là prévint les malheurs qui le menaçaient. **Le prince sensible et reconnaissant laissa au brahmane le choix de la récompense.**

Celui-ci demanda qu'on lui donnât le **nombre de grains de blé que produirait le nombre de cases de l'échiquier : un seul pour la première, 2 pour la seconde, 4 pour la troisième, ainsi de suite en doublant toujours jusqu'à la soixante-quatrième.** Le Roi, étonné de la médiocrité apparente de la demande, l'accorda sur le champ et sans examen. Mais quand ses trésoriers eurent calculé, ils trouvèrent que le Roi s'était engagé à une chose pour laquelle ni ses trésors, ni les greniers de ses vastes états n'y suffiraient. On évalua la somme de ces grains de blé à 3.145.740 villes, dont chacune contiendrait 1.024 greniers, dans chacun desquels il y aurait 174.762 mesures, et dans chaque mesure 32.768 grains. Alors le brahmane se servit de cette occasion pour lui faire sentir combien il importe aux rois de se tenir en garde contre ceux qui les entourent, et combien ils doivent craindre que l'on abuse de leurs meilleures intentions. »

Sources : *Oeuvres de Fréret (tome troisième)* et comptes rendus de l'Académie des inscriptions et des Belles-Lettres ; Wikipedia

II.2 Lucas était-il un des trésoriers du Roi des Indes ?

1. a) Calculer le « nombre de grains de blé que produirait le nombre de cases de l'échiquier », noté N .

b) Quel est le lien avec le jeu des tours de Hanoï ?

2. Comparons N avec son évaluation (notée E) proposée par les trésoriers :

$$E = 3\,145\,740 \times 1\,024 \times 174\,762 \times 32\,768 .$$

L'évaluation est-elle en réalité exacte ? Justifier rigoureusement.

Si non, trouver un moyen pour calculer la valeur exacte de l'erreur commise en évaluant N par E .

Si oui, trouver un moyen pour que ce soit non.