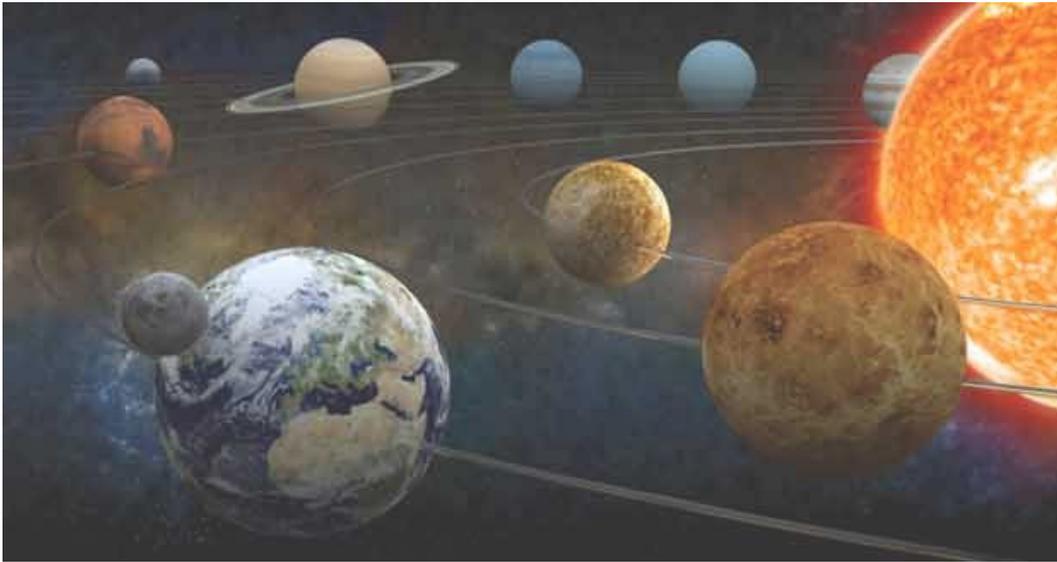


Pré-requis : suite géométrique (terme général, définition) + limite suite géométrique
 Devoir inspiré d'un exercice du manuel Odyssée, éd. Hatier, 2012.



Une suite arithmético-géométrique

La loi de Titius-Bode est une relation empirique entre les rayons des orbites des planètes du système solaire, qui utilise une suite.

En admettant que les planètes ont une trajectoire circulaire et en notant r_n le rayon de l'orbite de la $n^{\text{ème}}$ planète du système solaire à partir de Mercure (on a donc r_1 pour le rayon de l'orbite de Vénus, r_2 pour celui de la Terre...), la relation est $r_{n+1} = 2r_n - 0,4$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

r_n est exprimé en unités astronomiques (1 UA correspond à la distance Terre-Soleil).

1. a) On donne $r_1 = 0,7$. Calculer r_2 .

b) On considère la suite (u_n) telle que $u_n = r_n - 0,4$ pour tout entier $n \geq 1$.

Montrer que (u_n) est une suite géométrique, en précisant sa raison et son premier terme.

c) En déduire u_n en fonction de n , puis r_n en fonction de n .

2. a) Effectuer les calculs des termes de (r_n) pour les rangs 1 à 8.

b) Comparer ces résultats aux chiffres connus de nos jours :
 (faire une comparaison « subjective » mais argumentée,
 en calculant les erreurs absolues et relatives).

Planète	Vénus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne
Rayon de l'orbite (en UA)	0,723	1	1,523	5,203	9,537

Lors de sa publication originale en 1772, la loi de Titius-Bode était vérifiée par toutes les planètes connues, de Mercure à Saturne, avec une lacune entre Mars et Jupiter. Cette loi était alors considérée comme intéressante mais sans grande importance.

La découverte d'Uranus dont l'orbite respecte la loi, validera la loi de Titius-Bode aux yeux d'une grande partie de la communauté scientifique.

c) Il existe un objet céleste qui correspond au rang $n=4$, trouver lequel.

Pour expliquer les perturbations de l'orbite d'Uranus, la « légende » raconte que Urbain Le Verrier utilisa la loi de Titius-Bode et qu'en 1846, il put ainsi prévoir par le calcul la position de Neptune avant que la planète ne soit observée.

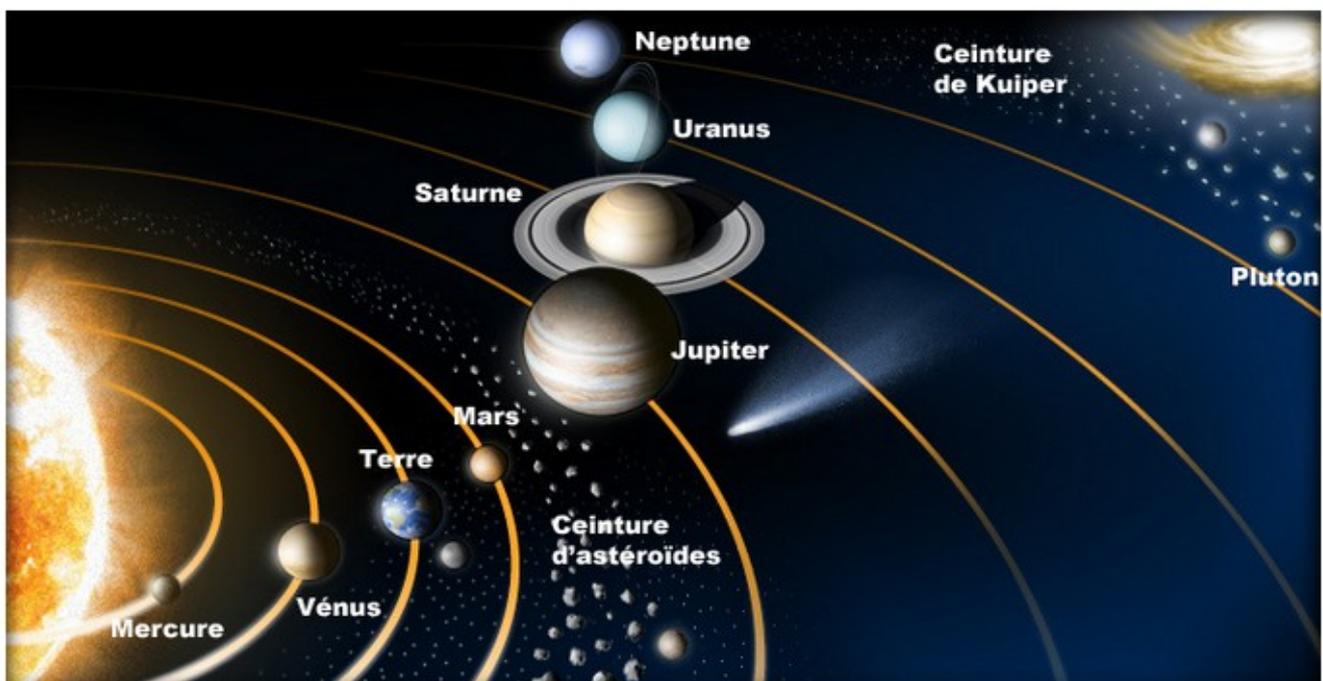
d) Le rayon de l'orbite de Neptune est 30,069 UA.

Que pensez-vous du résultat de la loi de Titius-Bode pour cette planète ?

e) Il reste le problème de Mercure. Les astronomes de l'époque prenaient un rang de « $-\infty$ ».

Expliquer ce résultat en calculant : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(0,4 + 0,3 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right)$.

Un système solaire à huit planètes ?



Les 8 planètes officielles du Système Solaire
© NASA / notre-planete.info

En refusant d'élargir les critères qui définissent une planète, les astronomes se satisfont désormais d'un Système Solaire composé des seules huit planètes dites classiques :

Mercure ; Vénus ; la Terre ; Mars ; Jupiter ; Saturne ; Uranus ; Neptune.

Selon la résolution B5 de l'UAI, ces huit planètes répondent aux conditions suivantes :

- elles orbitent autour du Soleil ;
- ont une masse suffisante pour que sa gravité l'emporte sur les forces de cohésion du corps solide et le maintienne en équilibre hydrostatique, sous une forme presque sphérique ;
- ont éliminé tout corps susceptible de se déplacer sur une orbite proche.

Quant à Pluton, elle a tout simplement perdu son statut de planète classique.

Lorsque Pluton fut découverte en 1930, elle fut considérée comme la neuvième planète de notre système solaire notamment à cause de sa taille que l'on croyait proche de celle de la Terre.

Mais les observations ultérieures montrèrent que Pluton, éloignée de 5,9 milliards de km du Soleil, est en réalité cinq fois plus petite (2 300 km de diamètre) et cent fois plus légère que la Terre.

Dans les années 1990, des milliers d'objets comparables à Pluton ont été découverts (dont Sedna, Haumea, Eris, Makémaké, Quaoar...) dans la ceinture de Kuiper, bien au-delà de l'orbite de Neptune.

Il devint donc difficile d'ajouter des milliers de planètes à celles, classiques, déjà connues de notre Système Solaire. C'est pourquoi, l'UAI décida de rétrograder officiellement Pluton et les autres gros objets de la ceinture de Kuiper dans une nouvelle classe, celle des planètes naines.

Cinq objets appartiennent aux planètes naines :

Cérès ; Pluton ; Hauméa ; Makémaké ; Éris.

Officiellement, une planète naine est un corps céleste qui répond aux 4 critères suivants :

- il orbite autour du Soleil ;
- il a une masse suffisante pour que sa gravité l'emporte sur les forces de cohésion du corps solide et le maintienne en équilibre hydrostatique, sous une forme presque sphérique ;
- il n'a pas éliminé d'autres corps de son environnement spatial proche ;
- il n'est pas un satellite d'une autre planète.

Depuis la découverte en 1992 des premières exoplanètes, la classification des planètes est devenu bien plus complexe et la rétrogradation de Pluton a suscité de vifs débats. Aujourd'hui, les astronomes et les planétologues ne parviennent toujours pas à s'entendre sur une définition consensuelle qui pourrait dénombrer le nombre de planètes de notre Système Solaire. Si l'on reprend l'acception de Pluton comme planète de notre Système Solaire, celui-ci en aurait une quarantaine.

Malgré son déclassement, Pluton suscite toujours l'intérêt des astronomes qui aimeraient en savoir plus sur ce garde-frontière de notre Système Solaire. La sonde New Horizon, le vaisseau le plus rapide jamais construit (avec près de 14 km/s), a atteint Pluton en juillet 2015.

La sonde New Horizons de la NASA a capturé des images haute résolution et en couleur inédites de Pluton. La surface de la planète naine arbore une grande variété de couleurs : du bleu pâle, au jaune, à l'orange en passant par le rouge. Cette photographie exceptionnelle sous-tend des caractéristiques géologiques et climatologiques complexes que les chercheurs commencent à peine à appréhender. Même pour une planète naine, Pluton recèle encore bien des mystères.



Source : notre-planete.info, http://www.notre-planete.info/actualites/actu_987_systeme_solaire_8_planetes.php

Loi de Titius-Bode : erreurs absolues et relatives

Planète	Loi de Titius-Bode		Erreur	
	Rang attribué	Distance prédite	absolue	relative
Mercure	$-\infty$	0,4	0,013	3,4 %
Vénus	1	0,7	0,023	3,2 %
Terre	2	1,0	0,000	0,0 %
Mars	3	1,6	0,077	5,1 %
Cérès	4	2,8	0,035	1,3 %
Jupiter	5	5,2	0,003	0,1 %
Saturne	6	10,0	0,463	4,9 %
Uranus	7	19,6	0,371	1,9 %
Neptune	8	38,8	8,731	29,0 %

Histoire de la loi de Titius-Bode

Une histoire passionnante, à découvrir ici :

http://oncle-dom.fr/sciences/astronomie/histoire/loi_de_bode/bode.htm

La découverte de Neptune

Des éléments à lire pour comprendre à quel point la découverte d'une planète est rarement le fruit des efforts d'un seul homme, mais aussi le fait qu'encore une fois, ceux qui retirent la gloire d'une telle découverte ne le méritent pas vraiment...

<http://oncle-dom.fr/sciences/astronomie/histoire/neptune/neptune.htm>

Début janvier 1801, Giuseppe Piazzi (1746-1826) découvre l'astéroïde Cérès, mais ne parvient pas à cerner son orbite complète : il n'a pu suivre l'astéroïde que sur neuf degrés de sa course. Gauss décide de déterminer sa trajectoire pour pouvoir ensuite le re-localiser. Pour cela, il fait le calcul de l'orbite, utilise des méthodes numériques fondées sur les moindres carrés, mène ses calculs jusqu'à vingt et une décimales... et parvient à la détermination exacte de la position de l'astéroïde, que l'astronome Zach observe à l'endroit prévu par Gauss ! Ces travaux assurent sa renommée.

La loi de Bode

Johann Titius découvre, en 1776, une loi empirique donnant les distances du Soleil aux planètes. On part de la suite 0, 3, 6, 12, 24, 48, 96, où chaque nombre est le double du précédent. On ajoute 4 à chaque nombre, ce qui donne : 4, 7, 10, 16, 28, 52, 100. Curieusement ces nombres sont très sensiblement proportionnels aux distances du Soleil à Mercure (4), Vénus (7), la Terre (10), Mars (16), Jupiter (52) et Saturne (100) [une unité correspond à environ 15 millions de kilomètres]. Johann Bode s'approprie cette loi, qui portera désormais son nom ! Cette loi est remarquable mais fait apparaître une lacune intrigante : il n'y a pas de planète correspondant à la place 28. La découverte faite par Piazzi de l'astéroïde Cérès change la donne, encore que sa trajectoire soit très mal connue. On ne possède qu'un petit nombre de données concernant ce corps. Gauss développe alors une technique permettant de calculer les coordonnées orbitales avec précision à partir d'un faible nombre d'observations. Grâce à cela, les astronomes retrouvent Cérès et ... vérifient que sa position correspond bien à la lacune (28) de la loi de Bode ! Dans son travail, Gauss introduit la fameuse courbe en cloche (« distribution gaussienne »), ainsi que la méthode des moindres carrés. Lorsque Uranus a été découvert on a pu constater que son emplacement correspondait bien à la valeur suivante de la loi de Bode soit 196 ($96 \times 2 + 4$) ! Au-delà la loi ne « marche » plus : Neptune (~ 300) ne correspond à aucun élément de la suite (mais Pluton est situé à l'emplacement suivant : $388 (192 \times 2 + 4)$, de sorte que l'on pourrait presque considérer que c'est Neptune qui est une anomalie).

1 J-J. Samuëli, J-C. Boudenot. *30 livres de mathématiques qui ont changé le monde*. Ellipses, 2006.