

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

PARTIE 2 : LA FONCTION CARRÉ

Définition : la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x)=x^2$ est appelée *fonction carré*.

I. Sens de variation de la fonction carré

Propriété : la fonction carré est strictement *sur* $]-\infty;0]$ et strictement *sur* $[0;+\infty[$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)			

Remarque : on en déduit le **tableau de signes** de l'expression x^2 :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2			

DÉMONSTRATION (DE LA PROPRIÉTÉ) :

1^{er} cas :

2^{ème} cas :

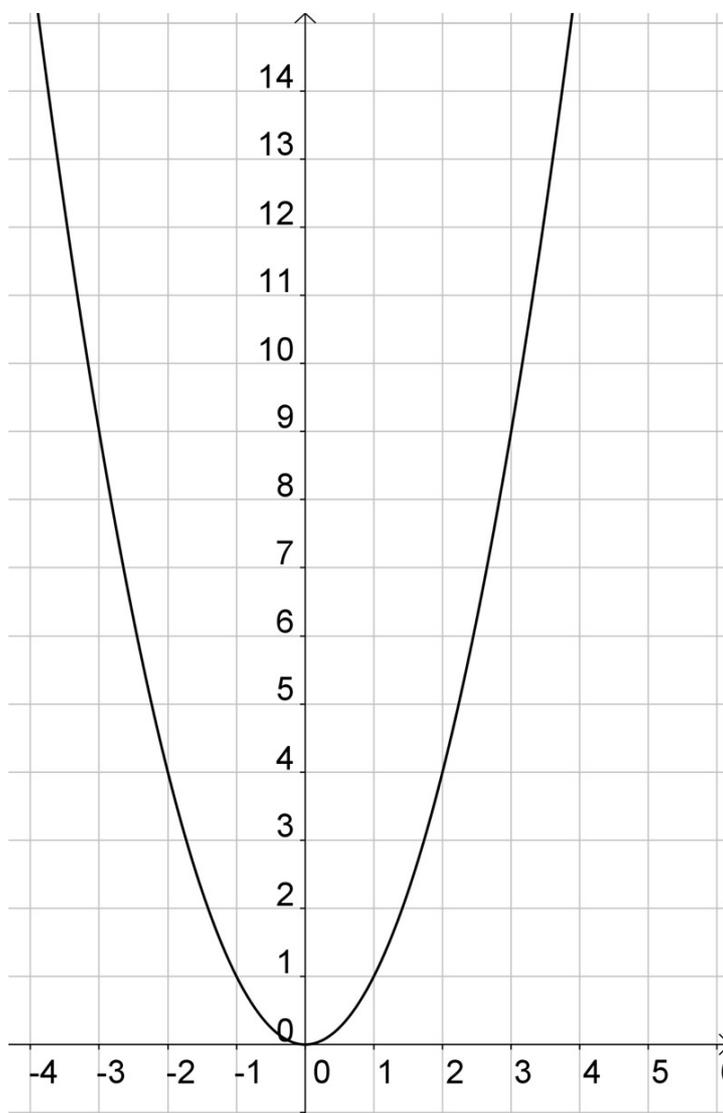
Propriété : pour tout réel k positif, il existe un unique réel positif x_k tel que $(x_k)^2 = k$.
Ce nombre est appelé, et noté

DÉMONSTRATION : admise, mais le tableau de variations nous permet de conjecturer cette propriété...

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

II. Représentation graphique de la fonction carré

Définition : dans un repère du plan orthogonal d'origine O , la représentation graphique de la fonction carré est appelée *parabole de sommet O* .



Remarque : pour tout réel x , $f(x) = f(-x)$. En effet :

On dit que la fonction carré est une *fonction paire*.

Propriété : dans un repère orthogonal du plan, la courbe représentative de la fonction carré est

DÉMONSTRATION : soit $x \in \mathbb{R}$.

On note P la parabole représentant la fonction carré : $M(x; x^2)$ appartient à P.

Le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses est le point M' de coordonnées : $M'(-x; x^2)$.

Or, $(-x)^2 = x^2$ donc M' a pour coordonnées $(-x; (-x)^2)$

d'où : M' appartient à P.

III. Applications

Le document dont sont tirés les images en première page¹ donne quelques applications (pratiques !). De plus, la fonction carré apparaît très souvent lorsqu'on souhaite résoudre un problème mettant en relation des aires (l'aire d'un carré de côté x cm est x^2 cm²). Plus généralement, on obtiendra des fonctions du type $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont des réels (on appelle cela une **fonction polynomiale de degré 2**). Voici d'autres applications :

III.1 Résolution d'équations du type $x^2 = a$ et d'inéquations du type $x^2 < a$ et $x^2 > a$ où $a \in \mathbb{R}$

Exemples :

1. a) Résoudre l'équation $x^2 = \pi$, graphiquement (à main levée) puis algébriquement.
b) Résoudre l'équation $x^2 = -1$, graphiquement (à main levée) puis algébriquement.
c) Résoudre graphiquement l'équation $x^2 = a$ où a est un réel strictement positif.
2. a) Résoudre l'inéquation $x^2 < \frac{5}{7}$, graphiquement (à main levée) puis algébriquement.
b) Résoudre l'inéquation $x^2 \geq 5$, graphiquement (à main levée) puis algébriquement.

III.2 Comparer des nombres

Exemples :

1. comparer $0,0072^2$ et $0,0068^2$.
2. Alors, comment comparer les carrés de deux nombres réels a et b ?
3. Si on sait que $a^2 > b^2$, que peut-on en déduire sur a et b ? ($a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$)

III.3 Déterminer les sens de variations d'une « fonction carrée »

Exemples :

III.3.1 Déterminer, de deux façons différentes, les sens de variations de la fonction f définie par :

$$f(x) = -5x^2 + 1.$$

III.3.2 Déterminer, de deux façons différentes, les sens de variations de la fonction f définie par :

$$f(x) = -5(x+1)^2.$$

¹ http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/S_e9rie_3-5_Paraboles.pdf