

Nom : Prénom :

T°S

RENDRE LE SUJET AVEC VOTRE COPIE

MATHÉMATIQUES : DEVOIR SURVEILLÉ 2
MERCREDI 4 DÉCEMBRE 2019

Durée de l'épreuve : 1 h 50. Calculatrice autorisée.

Un barème par exercice (**sur 20**) est donné à titre indicatif, et pourra être modifié.
Un temps indicatif est annoncé pour chaque exercice.

EXERCICE 1 (≈ 2,5 points)

env. 10 min

On suppose connu le fait que pour tous nombres complexes z_1 et z_2 : $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$.

Démontrer que pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n : $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

EXERCICE 2 (≈ 6 points)

env. 35 min

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe : $f(z) = z^2 + 2z + 9$.

1. Calculer l'image de $-2 - i\sqrt{5}$ par la fonction f .

2. a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 5$.

b) Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z .

Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles cette équation admet deux solutions complexes conjuguées.

3. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie : $|f(z) - 8| = 3$.

a) Montrer que : $|f(z) - 8| = 3 \Leftrightarrow |z + 1| = \sqrt{3}$.

b) En déduire la nature géométrique précise de l'ensemble (F).

4. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel. Démontrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.

Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs.

Il achète 80 % de ses boîtes chez le fournisseur A et 20 % chez le fournisseur B.

10 % des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20 % de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.

Partie A

On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les événements suivants :

- événement A : « la boîte provient du fournisseur A » ;
- événement B : « la boîte provient du fournisseur B » ;
- événement S : « la boîte présente des traces de pesticides ».

1. Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.

2. Démontrer que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à 0,88.

3. On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.

Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

Partie B

Le gérant d'un salon de thé achète 500 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 500 boîtes avec remise. On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 500 boîtes le nombre de boîtes sans trace de pesticides.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par X.

2. Calculer la probabilité que les 500 boîtes soient sans trace de pesticides.

3. Calculer une valeur approchée de la probabilité qu'au moins 420 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

Partie C

En achetant ses boîtes de thé chez le grossiste, qui lui envoie le thé par colis réceptionné avec accusé de réception, le gérant du salon de thé peut être victime de deux événements indépendants :

- C : « au moins une boîte est abîmée par le transport » ;
- R : « certains produits sont en cours d'approvisionnement » (et seront envoyés dans un autre colis).

D'après son expérience et les données dont il dispose, il estime que la probabilité de C est égale à 1 % et que celle de R est égale à 5 %.

Calculer la probabilité que lors d'un achat chez le grossiste, le gérant reçoive un colis dont aucune boîte n'est abîmée par le transport et que certains produits soient en cours d'approvisionnement.

EXERCICE 4 (≈ 3,5 points)

env. 15 min

- Déterminer la limite éventuelle de la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geq 3$ par : $v_n = \frac{\sin(n)}{n-2}$.
- Déterminer la limite éventuelle de la suite (w_n) définie sur \mathbb{N} par : $w_n = \frac{3 \times 4^n - 5^{n+2}}{2^n + 4 \times 7^{n+1}}$.

EXERCICE 5 (≈ 2 points)

env. 15 min

On cherche à savoir à quelle fraction est égal le nombre 0,1985 1985... (avec une infinité de 1985).

On note $v_n = 0, \underbrace{198519851985 \dots}_{n \text{ fois}}$ avec n répétitions consécutives de 1985.

Ainsi on a : $v_1 = 0,1985$, $v_2 = 0,19851985$, $v_3 = 0,198519851985$, etc.

On admet que, pour tout entier naturel non nul : $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1985}{10^{4k}}$ ie $v_n = \frac{1985}{10^4} + \frac{1985}{10^8} + \frac{1985}{10^{12}} + \dots + \frac{1985}{10^{4n}}$.

Autrement dit, après factorisation, on a : $v_n = 1985 \times \sum_{k=1}^n \frac{1}{10^{4k}}$.

- Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{10^{4k}} = \frac{1}{9999} \left(1 - \left(\frac{1}{10^4} \right)^n \right)$.

Aide : remarquer que $\frac{1}{10^{4k}} = \left(\frac{1}{10^4} \right)^k$.

- En déduire v_n en fonction de n .
- Déterminer la limite de la suite (v_n) .

En déduire à quelle fraction est égal 0,1985 1985... (avec une infinité de 1985).