

# J'aimerais tant prouver Syracuse...

La conjecture de Syracuse affirme que des suites de nombres construites selon des règles simples conduisent nécessairement à 1 quel que soit le point de départ. Malgré des progrès récents et l'intérêt de nombreux mathématiciens professionnels et amateurs, sa démonstration résiste encore.

Jean-Paul DELAHAYE  
est professeur d'informatique  
à l'Université de Lille.

Les sciences résolvent les questions élémentaires, puis passent à d'autres plus compliquées, progressant petit à petit. Le pédagogue défend aussi cette idée d'apprentissage graduel : « L'ontogenèse de l'apprentissage suit la phylogénèse des découvertes », pense-t-il ; l'élève traite les cas simples et anciens, puis lentement passe aux cas difficiles.

Hélas, le monde mathématique ne se plie pas à cette vision d'une armée de chercheurs laborieux avançant selon un plan fixé sur un front de difficultés : il est des passages étroits où l'on ne peut maintenir l'allure. Pire, la plaine est hérissée de murailles invisibles dont on ne découvre l'existence qu'en s'y cognant.

La conjecture de Syracuse est une de ces murailles sur laquelle la communauté mathématique a buté (avec amusement d'abord, avec agacement ensuite) et, pour l'instant, aucun alpiniste n'a su la gravir. Le problème est de formulation si simple qu'il semble étonnant que personne n'ait pu le résoudre : quand vous aurez lu cet article, vous en serez au même point que les plus grands mathématiciens, ce qui n'est pas une piètre satisfaction.

Détaillons la règle du jeu. Prenez un entier,  $n$  ; s'il est pair, divisez-le par 2, s'il est impair, multipliez-le par 3 et ajoutez 1. Recommencez cette opération avec le résultat obtenu. Prenons un exemple : partant de 10, vous passez à 5, puis à  $16 = (3 \times 5 + 1)$ , puis à 8, puis à 4, puis à 2, puis à 1, qui vous ramène à 4, 2, 1, cycle dans lequel vous restez alors tout le temps. Au bout du compte, on retombe sur 1. Deux entiers peuvent donner le même résultat (par exemple, 32 et 5 donnent 16, leurs cheminements se rejoignant), ce qui suggère de représenter les divers parcours sous la forme de graphes ou de tableaux.

Essayez d'autres valeurs au hasard, en vous aidant d'un ordinateur si vous voulez. *Vous tomberez toujours sur 1.* Cette affirmation péremptoire est injustifiée : personne n'a montré qu'on arrive toujours à 1 (d'où le nom de « conjecture de Syracuse » pour cette affirmation). On a essayé tous les nombres jusqu'à  $5,7 \cdot 10^{18}$ , et tous aboutissent à 1.

## Troubles dans les esprits

Cette conjecture dont l'origine, vers 1950, reste confuse porte une grande variété d'autres noms provenant de mathématiciens l'ayant étudiée ou fait connaître : problème de Collatz, problème de Kakutani, problème de l'algorithme de Hasse, problème d'Ulam. Le nom de conjecture de Syracuse est lié à l'Université de Syracuse, aux États-Unis, où le problème fut étudié. Le nom le plus souvent retenu aujourd'hui est plus simplement celui de « problème  $3x + 1$  ».

Shizuo Kakutani fit circuler le problème et raconte : « Pendant un mois, tout le monde à l'Université de Yale travailla dessus, sans résultat. Un phénomène semblable se produisit à l'Université de Chicago. Cette énigme, pensaient certains, avait été avancée par le KGB pour ralentir la recherche mathématique aux États-Unis. »

La conjecture de Syracuse a donné lieu à des publications rattachées au domaine de la théorie des nombres. Ces travaux ont pris une tournure très sérieuse, conduisant à certains résultats que nous allons examiner. Cependant, on ne sait toujours pas répondre à la question : « Tombe-t-on toujours sur 1 ? »

### L'ESSENTIEL

➤ La conjecture de Syracuse énonce qu'en soumettant un entier quelconque à certaines opérations précises, on finit par obtenir 1.

➤ On l'a vérifiée expérimentalement avec de nombreux entiers, et on a prouvé quelques résultats la concernant, mais rien n'assure que nous soyons proches d'une démonstration définitive.

➤ Cette conjecture illustre la façon dont les mathématiciens essaient de « réduire » un problème et aboutissent parfois à une certitude subjective qu'ils ne parviennent pas à démontrer.



Shutterstock/Michael Bamnolter

**LE VOL NUMÉRO  $N$**  est la suite de nombres obtenue à partir d'un entier  $n$  dans la conjecture de Syracuse. « Atterrit-il » toujours en 1 ?

Que peut-il se produire d'autre ? Partant d'un entier quelconque, *a priori* trois cas sont possibles : on aboutit à 1 (c'est-à-dire sur le cycle  $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ ) ; on aboutit à un autre cycle que  $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$  ; on tombe sur une suite infinie de nombres entiers ne revenant jamais là où elle est passée, et prenant donc des valeurs de plus en plus grandes.

N'importe quel amateur peut tenter sa chance, mais il doit savoir que des gens intelligents (parfois géniaux) ont essayé et s'y sont cassé les dents : si vous croyez, après quelques heures de recherche, avoir trouvé un raisonnement qui démontre la conjecture, rédigez-le soigneusement. Toutefois, méfiez-vous : nombre de fausses preuves ont déjà circulé, dont une en 2011. En 1998, une preuve a été déposée chez un notaire par un mathématicien amateur inquiet qu'on ne lui vole son idée.

Il y a une trentaine d'années, le grand mathématicien Paul Erdős, qu'on interrogeait sur ce problème et sur l'impuissance des mathématiques à le traiter malgré sa déconcertante simplicité, répondit que « les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour aborder de telles questions ». Est-ce toujours le cas aujourd'hui ?

### Le vol d'un entier

À défaut de prouver le résultat et pour tenter de trouver un contre-exemple (après tout, peut-être que tout entier ne tombe pas sur 1 !), de nombreux calculs ont conduit à des records soigneusement répertoriés et auxquels il est plus facile de s'attaquer qu'à la conjecture elle-même. L'étude des particularités du processus est motivée par l'espoir que la démonstration d'une propriété équivalente permettra de démontrer la conjecture... Avant d'indiquer des records, fixons un vocabulaire imagé qui nous facilitera la description des comportements des suites.

Nous dirons, dans ce qui suit, que la suite obtenue à partir d'un entier est son vol. Ce vol atteint une altitude maximale, qui est l'entier le plus grand par lequel on passe. Il a une durée égale au nombre d'étapes avant d'atterrir à 1. Nous examinerons aussi la durée de vol en altitude, qui correspond au nombre maximum de points consécutifs ayant une valeur supérieure à celle du point de départ. Le vol numéro 11 est ainsi :  $11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ . Son altitude maximale est 52, sa durée de vol 14 et sa durée de vol en altitude 7 (voir la figure page 101).

Remarquons qu'il existe des vols de durée aussi longue qu'on veut : le vol  $2^n$  est  $2^n \rightarrow 2^{n-1} \rightarrow 2^{n-2} \rightarrow 2^{n-3} \rightarrow \dots \rightarrow 2 \rightarrow 1$ , qui a pour durée  $n$ . Les mathématiciens ont aussi démontré que, si tout nombre a une durée de vol en altitude finie, alors la conjecture de Syracuse est vraie (voir l'encadré page 102).

Le record de vérification de la conjecture, nous l'avons mentionné, est  $5,7 \cdot 10^{18}$ , ce qui signifie que tous les vols dont le numéro est inférieur à  $5,7 \cdot 10^{18}$  atterrissent en 1. Ce résultat est dû à Tomás Oliveira e Silva, de l'Université d'Aveiro, au Portugal, qui a développé des trésors d'ingéniosité pour mener les calculs.

On appelle *vol de durée record* un vol dont tous les vols de numéro inférieur sont plus courts. Le vol 7, dont la durée est 16, est un vol de durée record, car les vols 1, 2, 3, 4, 5 et 6 ont des durées inférieures. Aujourd'hui, le plus grand vol de durée record publié (par Eric Roosendaal) est le 131<sup>e</sup> : il s'agit du vol 104 899 295 810 901 231, dont la durée est 2 254.

On considère de même les *vols de durée en altitude record* (tout vol de numéro plus petit reste en altitude moins longtemps). On en a trouvé 34, dont le plus grand publié (par E. Roosendaal) est le vol 2 602 714 556 700 227 743, qui reste en altitude 1 639 étapes.

Les vols d'altitude record sont ceux qui atteignent un maximum d'altitude qu'aucun vol de numéro inférieur n'atteint. On en connaît 88, dont le dernier publié (par E. Roosendaal) est le vol 1 980 976 057 694 848 447, qui atteint l'altitude : 64 024 667 322 193 133 530 165 877 294 264 738 020.

On démontre que le nombre  $P(N)$  d'étapes paires du vol  $N$  et le nombre  $I(N)$  d'étapes impaires vérifient toujours :  $I(N)/P(N) < \log 2 / \log 3$ . On remarque que, pour certains nombres  $N$ , le rapport  $I(N)/P(N)$  s'approche de  $\log 2 / \log 3 = 0,63092975\dots$  On conjecture qu'on s'en approche de plus en plus. Cela suggère de repérer les records d'approche : c'est le nombre  $N$  tel que le rapport  $I(N)/P(N)$  est plus grand que le rapport  $I(n)/P(n)$  pour toutes les valeurs de  $n$  inférieures à  $N$ . Ces records d'approche sont rares : seuls 16 sont connus aujourd'hui, dont le dernier est  $N = 104\,899\,295\,810\,901\,231$ , qui donne  $I(N)/P(N) = 0,605413$ .

### Quelques idées pour battre des records...

On sait que, pour tout entier  $p$ , il existe au moins un vol de durée  $p$  : le vol  $2^p$ . En général, il en existe d'autres, et trouver celui qui a le plus petit numéro n'est pas facile. Un défi avait été lancé pour l'an 2000 : trouver le plus petit entier  $n$  dont la durée de vol est 2 000. Actuellement, c'est 377 060 271 667 498 687, mais rien n'assure qu'il n'y a pas mieux.

En programmation, l'intelligence est utile, et les résultats obtenus avec les plus puissantes machines peuvent être battus par un ordinateur personnel astucieusement programmé. Voici quelques idées conduisant à gagner du temps dans la recherche d'un contre-exemple et utiles pour battre les records mentionnés.

Pour établir que tout vol inférieur à  $n$  atterrit en 1, il n'est pas nécessaire de mener le calcul jusqu'à 1 : on peut arrêter chaque vol dès qu'il passe en dessous de son point de départ  $x$  (car si, avant  $x$ , on a testé tous les vols de numéros inférieurs, on est alors certain que le vol  $x$ , une fois arrivé sous  $x$ , se poursuivra jusqu'à 1). On arrête aussi le calcul dès qu'on trouve un nombre déjà atteint par un vol précédent (pour le savoir, on doit mémoriser les nombres par lesquels on est déjà passé, ce qui doit se faire intelligemment pour que le procédé soit économique).

Plus intéressantes encore sont les remarques mathématiques du type : tout vol dont le numéro est de la forme  $n = 4k + 1$  finit par passer en dessous de  $n$ . On calcule les étapes à partir de  $n$  (qui est impair) : on obtient  $12k + 4$  (pair),  $6k + 2$  (pair),  $3k + 1$  (pair ou impair, mais plus petit que  $n$ ).

Ainsi, dans une suite de tests systématiques, il est inutile de traiter les nombres de la forme  $4k + 1$  (car ils passent toujours sous  $n$ ), ce qui fait gagner 25 pour cent du temps de calcul. Comme il est aussi inutile de traiter ceux de la forme  $4k$  ou  $4k + 2$  (qui passent dès la première étape au-dessous de leur point de départ), il ne reste plus qu'à essayer ceux de la forme  $4k + 3$ , soit une économie de calcul de 75 pour cent par rapport à la méthode naïve.

Ce type d'accélération des calculs mérite d'être perfectionné. Voici un premier pas dans cette direction : tout vol dont le numéro est de la forme  $n = 16k + 3$  finit par passer en dessous de  $n$ . En effet, les étapes à partir de  $16k + 3$  (impair) sont  $48k + 10$  (pair),  $24k + 5$  (impair),  $72k + 16$  (pair),  $36k + 8$  (pair),  $18k + 4$  (pair),  $9k + 2$  (pair ou impair, mais plus petit que  $n$ ).

En poursuivant sur le même principe, on montre que, si l'on écrit les nombres sous la forme  $256k + i$  avec  $i$  variant de 0 à 255, seuls ceux correspondant à un  $i$  parmi : 27, 31, 47, 55, 63, 71, 91, 103, 111, 127, 155, 159, 167, 191, 207, 223, 231, 235, 239, 251, 255 doivent être traités, ce qui cette fois donne un gain de plus de 92 pour cent.

Le programme de E. Roosendaal, à qui l'on doit certains records, est fondé sur une étude des entiers mis sous la forme  $65536k + i$  avec  $i$  variant de 0 à 65535 ( $65536 = 2^{16}$ ), dont seuls 1729 cas (soit 2,6 pour cent) restent à étudier. Cette économie est associée, dans son programme, à d'autres idées arithmétiques, ainsi qu'à une méthode de traitement simultané de plusieurs vols à la fois. Le programme de T. Oliveira e Silva améliore encore ces idées, ce qui lui permet d'être le détenteur actuel du record de vérification de la conjecture.

## Des résultats en progrès

Les résultats les plus avancés obtenus du côté des tentatives de démonstrations mathématiques utilisent aussi l'idée du vol en altitude. En effet, un peu de réflexion montre que la conjecture de Syracuse est équivalente à la proposition : « la durée de tout vol en altitude est finie » (voir l'encadré page 102).

Fondant leurs raisonnements sur une étude arithmétique fine de l'arbre associé à la conjecture, R. Terra et C. Everett ont montré indépendamment que « presque tout vol finit par passer sous son point de départ ». Le « presque » signifie ici que :

– il existe un nombre  $n$  tel que, parmi les vols de numéros inférieurs à  $n$ , au plus dix pour cent ne passent pas sous leur point de départ ;

## Règles et exemples du jeu de Syracuse

### LA RÈGLE DU JEU :

SI  $N$  EST PAIR : DIVISEZ PAR 2

SI  $N$  EST IMPAIR : MULTIPLIEZ

PAR 3 ET AJOUTEZ 1

RECOMMENCEZ

JUSQU'À OBTENIR 1

### EXEMPLE : 10

10 DIVISÉ PAR 2 DONNE 5

5 MULTIPLIÉ PAR 3 ET PLUS 1

DONNE 16

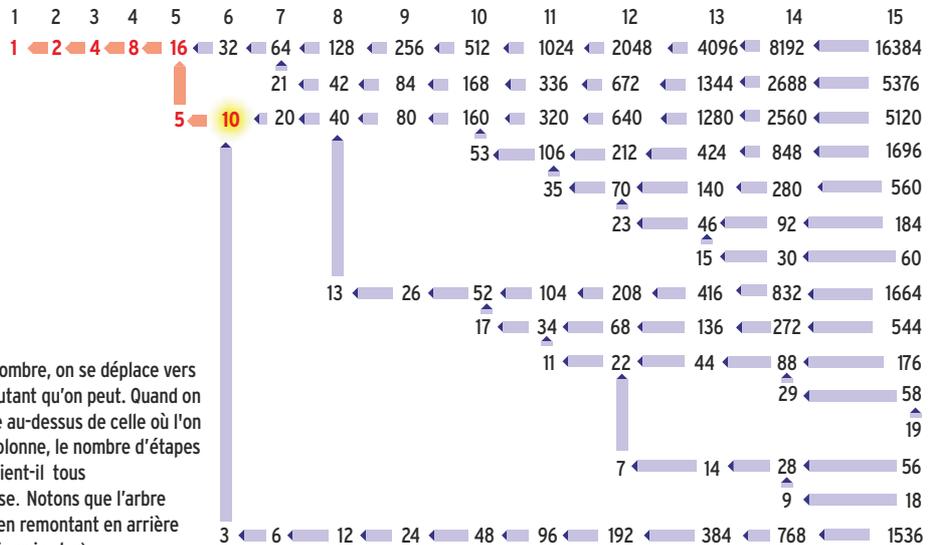
16 DIVISÉ PAR 2 DONNE 8

8 DIVISÉ PAR 2 DONNE 4

4 DIVISÉ PAR 2 DONNE 2

2 DIVISÉ PAR 2 DONNE 1.

Pour suivre un vol à droite, on part d'un nombre, on se déplace vers la gauche en restant sur la même ligne autant qu'on peut. Quand on arrive en bout de ligne, on passe à la case au-dessus de celle où l'on est. Si l'entier  $n$  est placé dans la  $i$ -ème colonne, le nombre d'étapes paires du vol  $n$  est  $i$ . Le tableau infini contient-il tous les entiers? C'est la conjecture de Syracuse. Notons que l'arbre ci-contre est construit en partant de 1 et en remontant en arrière (chaque entier a un antécédent ou deux, jamais plus).



– il existe un nombre  $n'$  (plus grand que  $n$ ) tel que, parmi les vols de numéros inférieurs à  $n'$ , au plus un pour cent ne passe pas sous leur point de départ ;

– il existe un nombre  $n''$  (plus grand que  $n'$ ) tel que parmi les vols de numéros inférieurs à  $n''$ , au plus 0,1 pour cent ne passe pas sous leur point de départ; etc.

On a l'impression qu'on n'est pas loin de la conjecture, mais réfléchissons : ce résultat signifie seulement que les vols qui restent toujours en altitude sont de plus en plus rares quand on tend vers l'infini. Il se peut quand même qu'il en existe, et donc on ne peut pas déduire la conjecture du « presque » de R. Terras et C. Everett.

Pire, leur résultat n'implique même pas qu'une infinité de vols atterrissent en 1, car il n'interdit pas l'existence d'un cycle autre que  $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ . Le résultat est un progrès seulement si c'est véritablement un premier pas vers le même résultat sans le « presque ».

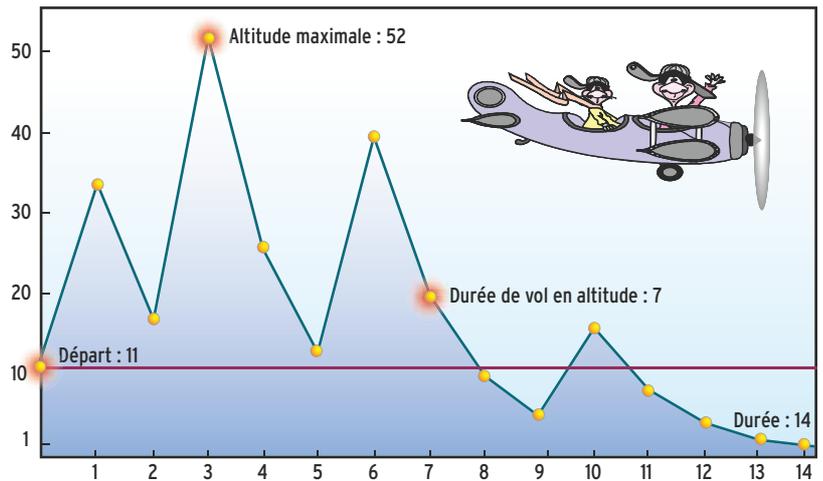
Plus récemment, des démonstrations concernant cette fois les vols qui atterrissent en 1 (et non plus les vols qui ne restent qu'un temps fini au-dessus de leur point de départ) ont été obtenues. On a prouvé qu'il existait une constante  $c$  telle que, si  $n$  est assez grand, alors le nombre de  $x$  inférieurs à  $n$  qui atterrissent en 1 est supérieur à  $n^c$ .

Le résultat a d'abord été montré pour la constante  $c = 0,05$  par Richard Crandall en 1978, puis avec  $c = 0,3$  par Jürgen Sander,  $c = 0,43$  par Ilia Krasikov en 1989,  $c = 0,48$  par Gunter Wirsching en 1993,  $c = 0,81$  par David Applegate et Jeffrey Lagarias en 1995, et enfin  $c = 0,84$  par J. Lagarias et I. Krasikov en 2002. On approche du but (qui sera atteint si l'on obtient le résultat avec  $c = 1$ ), mais rien n'assure que les méthodes utilisées permettront d'avancer plus.

### Une conjecture « presque » démontrée

Les démonstrations des résultats de 1995 et 2002 sont assez particulières, car elles utilisent de grands systèmes d'équations qui ont été traitées par informatique. Elles ne peuvent être vérifiées à la main, et les articles dans lesquels les résultats sont présentés donnent, non pas les démonstrations du théorème avec  $c = 0,81$  et  $c = 0,84$ , mais l'explication de la façon dont les systèmes d'équations sont écrits, les résultats des programmes et la façon de les interpréter : un mathématicien qui veut vérifier le résultat doit suivre les explications et les raisonnements, écrire un programme (compliqué!), le faire fonctionner et s'assurer qu'il a obtenu ce qu'il faut.

Une autre série de résultats remarquables concerne cette fois les cycles (éventuels) autres que celui à trois éléments,  $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ . R. Crandall et N. Yoneda ont établi en 1978 que, s'il en existait, ils étaient nécessairement de taille (nombre



LE VOL NUMÉRO 11, qui part de l'entier 11, atteint une altitude maximale (le plus grand entier de la suite) de 52. Sa durée de vol en altitude (le nombre d'entiers consécutifs plus grands que celui de départ) est de 7. Sa durée totale (le nombre d'étapes avant « d'atterrir » à 1) est de 14.

de leurs éléments) supérieure à 275 000. Cette borne a été poussée à 17 087 915 en 1993, puis tout récemment à 17 milliards. Les preuves de ces affirmations utilisent les informations provenant des records de vérification de la conjecture, faisant là encore de ces résultats mathématiques des propriétés invérifiables par un mathématicien sans ordinateur. S'il y a des cycles autres que notre cycle  $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ , ils seront vraiment très longs!

Les expérimentations numériques jusqu'à  $5,7 \cdot 10^{18}$  constituent un premier « presque » ; les résultats mathématiques déjà cités constituent un deuxième « presque ». En voici un troisième.

Certains raisonnements dits heuristiques (« qui aident à la découverte »), fondés sur des considérations approximatives ou probabilistes, éclairent une question mathématique. Le raisonnement suivant concernant la conjecture de Syracuse est une tentative de ce type :

« Chaque nombre est soit pair, soit impair ; il y a autant de nombres pairs que de nombres impairs, et donc une fois sur deux, lors d'un vol, on appliquera la formule  $n \rightarrow 3n + 1$  et, une fois sur deux, on appliquera la formule  $n \rightarrow n/2$ . À chaque fois qu'on fera deux étapes, l'altitude sera donc, en gros, multipliée par  $3/2$  (ce qui revient à ajouter 50 pour cent), et... le vol montera à des altitudes infinies. » Le raisonnement heuristique naïf conduit à l'inverse de ce qu'énonce la conjecture de Syracuse!

Ce raisonnement est vraiment trop naïf, car il ne tient pas compte du fait que, lorsque l'on a appliqué la formule  $n \rightarrow 3n + 1$  à partir d'un nombre impair, on est certain de trouver un nombre pair (trois fois un nombre impair est impair, en ajoutant un, on a donc un nombre pair).

Il faut améliorer le raisonnement. Voici la version qu'en propose J. Lagarias : après avoir appliqué la formule  $n \rightarrow 3n + 1 = m$  (pair) et juste après la formule  $m \rightarrow m/2$ , on tombe cette fois sur un nombre qu'on peut considérer comme quelconque. Il a donc 1 chance sur 2 d'être impair, 1 chance sur 4 d'être le double d'un nombre impair, 1 chance

sur 8 d'être le quadruple d'un nombre impair, etc. Le vol qui mène d'un nombre impair au suivant aura donc pour effet « en moyenne » :

- de multiplier  $n$  par  $3/2$  une fois sur 2 (trajet de longueur 2) ;
- de le multiplier par  $3/4$ , une fois sur 4 (trajet de longueur 3) ;
- de le multiplier par  $3/8$ , une fois sur 8 (trajet de longueur 4) ;
- etc.

Cela conduit à la conclusion qu'en moyenne, entre deux entiers impairs appartenant à un même vol, on multiplie l'altitude par la constante :

$$c = (3/2)^{1/2}(3/4)^{1/4}(3/8)^{1/8}(3/16)^{1/16} \dots = 3/4.$$

En moyenne, on passe donc d'un nombre impair à un nombre impair plus petit de 25 pour cent, et donc on finit par atterrir sur un cycle (le raisonnement heuristique n'exclut pas qu'il puisse y avoir d'autres cycles que  $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ ).

L'intérêt de ce raisonnement un peu compliqué est qu'en considérant maintenant un processus aléatoire construit sur le modèle supposé dans le raisonnement heuristique, on peut calculer le temps moyen pour que, partant de  $n$ , on passe en dessous de  $n$  (*durée moyenne de vol en altitude en ne comptant que les étapes impaires*). Le résultat de ce calcul est 3,49265... Or en évaluant, cette fois expérimentalement, la valeur moyenne de cette durée de vol en altitude (on essaie tous les entiers entre trois et deux milliards, et l'on fait la moyenne), on trouve 3,4926... Cette coïncidence numérique remarquable indique que le modèle probabiliste du raisonnement heuristique est certainement correct.

S'il est correct, il n'y a pas de vol infini en altitude, et donc la conjecture est vraie (du moins concernant l'inexistence de vol tendant vers l'infini).

Malheureusement, pour avoir une démonstration complète, il faudrait justifier par une preuve (et pas par une expérimentation) que le modèle probabiliste utilisé est correct. Le raisonnement heuristique renforce la conviction qu'il n'existe pas de vols infinis, mais ce n'est pas une démonstration.

On est ici dans une situation analogue à celle concernant les décimales du nombre  $\pi$  : dans les deux cas, on a une suite numérique parfaitement déterminée par des règles arithmétiques fixes ; dans les deux cas, on constate que la suite se conforme miraculeusement bien à un modèle probabiliste clairement identifié (pour  $\pi$ , c'est le modèle du tirage équitable des chiffres) ; dans les deux cas, une vérification numérique poussée a été menée, mais, dans les deux cas, sans prouver ce qui est constaté par les calculs numériques.

Remarquons que les modèles probabilistes prédisent que l'altitude la plus haute du vol  $n$  est au plus  $Kn^2$  (pour une certaine constante  $K$ ), ce qui, pour  $K=8$ , est aussi expérimentalement vérifié.

Nous avons maintenant trois « presque » pour la conjecture de Syracuse. Des « presque » ne suffisent pas à démontrer un résultat, et donc, même si notre conviction s'est renforcée, la conjecture de Syracuse n'est pas devenue un théorème.

J. Lagarias m'a indiqué que « la conjecture est encore désespérément hors de portée, mais je la crois vraie. Si elle devait être fausse, cela serait à cause d'un long cycle plutôt qu'à cause d'un vol infini. Même cela semble extrêmement improbable. Mon intuition dit "impossible", mais je ne sais pas en trouver une bonne traduction verbale ».

## PLUSIEURS FORMULATIONS ÉQUIVALENTES

(a) Si tout nombre supérieur à 4 a une durée de vol en altitude finie, alors la conjecture de Syracuse est vraie. Supposons que l'hypothèse est vraie. Montrons par récurrence que tout  $n$  atterrit en 1. C'est vrai pour 5. Soit un entier  $n > 5$ . Supposons que tout entier  $i < n$  atterrit en 1. Par hypothèse,  $n$  a une durée de vol en altitude finie. Donc, partant de  $n$ , on descend sous  $n$ , et l'on arrive donc à un  $i$  dont, par hypothèse, on sait qu'il atterrit en 1, donc  $n$  atterrit en 1.

(b) Plus généralement, la conjecture de Syracuse est équivalente à l'un des énoncés suivants :

- (1) la durée de tout vol est finie ;
- (2) la durée de tout vol en altitude est finie ;
- (3) tout vol a un nombre fini d'étapes paires ;
- (4) tout vol a un nombre fini d'étapes paires en altitude ;
- (5) tout vol a un nombre fini d'étapes impaires ;
- (6) tout vol a un nombre fini d'étapes impaires en altitude.

Il est clair que l'affirmation (1) implique les autres affirmations.

Nous avons déjà vu que (2) implique (1). Partant d'un nombre pair, on aboutit nécessairement, au bout d'un nombre fini d'étapes, à un nombre impair et partant d'un nombre impair, on aboutit en une étape à un nombre pair. Cela montre que (3) équivaut à (5) et à (1). De même (4) équivaut à (6) et à (2).

## L'indécidabilité n'est pas loin

Ne pas réussir à démontrer un résultat conduit à se poser la question : serait-ce un indécidable ? C'est-à-dire : ne se pourrait-il pas que les méthodes traditionnelles des mathématiques (codifiées, par exemple, dans la très puissante théorie des ensembles) ne soient pas en mesure de démontrer la conjecture de Syracuse qui pourtant serait vraie ?

Notons que la conjecture pourrait être fausse et que cela soit indécidable par les méthodes mathématiques traditionnelles : cela signifierait qu'un jour nous allons tomber sur un entier que nous n'arriverons pas à faire atterrir sur 1 – le calcul fournissant indéfiniment des éléments de la suite différents de 1 –, mais dont nous ne saurons pas montrer non plus qu'il n'atterrira jamais sur 1.

Exceptionnellement, nous avons quelques raisons de considérer cette question de l'indécidabilité avec sérieux, car un résultat de logique mathématique établit que nous ne sommes pas loin de l'indécidabilité.

Ce résultat est dû à John Conway. Celui-ci a considéré les généralisations de la conjecture de Syracuse obtenues en prenant non plus deux formules qu'on applique selon que  $n$  est pair ou impair, mais en considérant  $p$  formules qu'on applique selon le reste de la division de  $n$  par  $p$ . Conway montre comment définir précisément une conjecture, du type « tout  $n$  atterrit à 1 », de telle façon qu'elle soit indécidable dans la théorie des ensembles.

En fait, dans n'importe quelle théorie mathématique, la méthode de Conway permet de construire un problème ressemblant à la conjecture de Syracuse et qui y soit indécidable (attention : cela ne signifie pas qu'on puisse définir un problème de type Syracuse qui soit indécidable dans toutes les théories à la fois ; une telle chose n'existe pas, car « être indécidable » est toujours relatif à une théorie fixée).

Le résultat de Conway n'établit pas que la conjecture est indécidable ni même qu'elle est difficile (car certaines variantes de la conjecture sont faciles!), mais seulement que des problèmes assez semblables le sont, ce qui est quand même troublant.

En 1993, le résultat de Conway a été utilisé par Philippe Devienne, Patrick Lebègue et Jean-Christophe Routier, du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille, pour démontrer la puissance d'un formalisme de programmation à base de règles logiques. Comme d'habitude, les recherches en apparence les plus futiles se trouvent avoir des conséquences pratiques, insoupçonnables *a priori*.

### Des variantes aussi difficiles

Les mathématiciens sont toujours soucieux de généralité, car elle permet d'extraire pleinement la puissance d'un raisonnement particulier et d'en tirer des conséquences inattendues. Ils se sont donc interrogés sur ce qu'on obtenait pour des problèmes ressemblant à la conjecture de Syracuse.

Ils se sont demandé d'abord ce qui se passait pour le problème  $3x + 1$  lorsqu'on autorisait les altitudes négatives. La conjecture qu'ils ont proposée est que tous les vols se terminent sur l'un des trois cycles suivants :

$$-1 \rightarrow -2.$$

$$-5 \rightarrow -14 \rightarrow -7 \rightarrow -20 \rightarrow -10.$$

$$-17 \rightarrow -50 \rightarrow -25 \rightarrow -74 \rightarrow -37 \rightarrow -110 \rightarrow -55 \rightarrow -164 \rightarrow -82 \rightarrow -41 \rightarrow -122 \rightarrow -61 \rightarrow -182 \rightarrow -91 \rightarrow -272 \rightarrow -136 \rightarrow -68 \rightarrow -34.$$

Pour la fonction  $5x + 1$  (à utiliser à la place de  $3x + 1$  quand  $x$  est impair), tous les vols n'arrivent pas à 1, car, en plus du cycle  $6 \rightarrow 3 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ , on trouve les cycles :

$$13 \rightarrow 66 \rightarrow 33 \rightarrow 166 \rightarrow 83 \rightarrow 416 \rightarrow 208 \rightarrow 104 \rightarrow 52 \rightarrow 26.$$

$$17 \rightarrow 86 \rightarrow 43 \rightarrow 216 \rightarrow 108 \rightarrow 54 \rightarrow 27 \rightarrow 136 \rightarrow 68 \rightarrow 34.$$

Le vol 7 pour  $5x + 1$  semble infini quoiqu'on ne sache pas le démontrer.

NUMÉRO DU RECORD	NUMÉRO DU VOL	DURÉE
1	2	2
2	3	7
3	6	8
4	7	16
5	9	19
6	18	20
7	25	23
8	27	111
9	54	112
10	73	115
11	97	118
12	129	121
13	171	124
14	231	127
15	313	130
16	327	143
17	649	144
18	703	170
19	871	178
20	1161	181

LES VOLS DE DURÉE RECORD sont ceux dont la durée est supérieure à celle de tous les vols qui les précèdent. Par exemple, le vol 18 a une durée de 20 et aucun vol avant lui n'a une durée plus grande. Seuls les 20 premiers vols de durée record sont indiqués ici.

L'adaptation de l'argument heuristique de J. Lagarias suggère d'ailleurs que, pour  $qx + 1$  à la place de  $3x + 1$ , si  $q$  est  $>3$ , alors il existe des vols infinis.

Pour le problème  $181x + 1$ , on trouve un cycle qui ne contient pas 1. De même, pour  $q = 1093$ , on montre que certains vols n'atterrissent pas à 1.

Tout cela a conduit à une nouvelle conjecture formulée par R. Crandal (une sorte de conjecture anti-Syracuse) qui affirme : pour  $qx + 1$  (à la place de  $3x + 1$ ), avec  $q$  impair et supérieur à 3, il y a toujours au moins un vol qui n'atterrit pas en 1. Bien sûr, cette conjecture reste à démontrer!

Les considérations ci-dessus sur les cycles montrent que la conjecture de Crandal est vraie pour  $q$  égal à 5, 181 et 1093. En 1995, Z. Franco et C. Pomerance ont montré que les entiers  $q$  pour lesquels la conjecture de Crandal était vraie devenaient de plus en plus fréquents quand  $q$  tend vers l'infini, autrement dit que la conjecture était « presque vraie » (comme il est « presque vrai » que tout vol pour  $3x + 1$  passe sous son point de départ).

D'autres généralisations ont été formulées, et des résultats ont établi des connexions entre ces questions, l'arithmétique des nombres premiers, certaines équations diophantiennes (équations à coefficients entiers dont on cherche des solutions en nombres entiers), les chaînes de Markov (des itérations probabilistes) et la théorie ergodique (études de l'utilisation répétée des fonctions de mélange).

Avec toutes ces variantes donc, même si la conjecture de Syracuse était résolue prochainement, les mathématiciens et les expérimentateurs numériques ont de quoi s'amuser pendant des siècles.

### livres

- J. LAGARIAS, *The Ultimate Challenge: The  $3x+1$  Problem*, American Mathematical Society, 2011.
- G. WIRSCHING, *The Dynamical System Generated by the  $3N+1$  Function*, Springer-Verlag Berlin & Heidelberg GmbH, 1998.

### articles

- K. STUART et S. JANOS, *The undecidability of the generalized Collatz problem*, in *Proceedings of TAMC 2007*, pp. 542-553, 2007.

### internet

- [http://en.wikipedia.org/wiki/Collatz\\_conjecture](http://en.wikipedia.org/wiki/Collatz_conjecture)
- T. OLIVEIRA E SILVA, *Computational verification of the  $3x+1$  conjecture* : [www.ieeta.pt/~tos/3x+1.html](http://www.ieeta.pt/~tos/3x+1.html)
- E. ROOSENDAAL, *On the  $3x + 1$  problem* : [www.ericr.nl/wondrous/](http://www.ericr.nl/wondrous/)