

Note :

DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUESDurée : 35 minutes. Calculatrice AUTORISÉE en mode examen.**EXERCICE 1**

env. 10 min

Calculer les deux intégrales suivantes, en écrivant I sous la forme d'une fraction irréductible et J sous la forme $a \ln\left(\frac{b}{c}\right)$ (a, b et c réels) : $I = \int_{-5}^{-1} \frac{-5}{(-11t+7)^2} dt$ et $J = \int_0^2 \frac{-3e^{11x+2}}{2-e^{11x+2}} dx$.

EXERCICE 2

env. 5 min

À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\int_0^{-1} (-2x+1)e^{-x} dx = -e-1$.

EXERCICE 3

env. 5 min

À l'aide d'une double intégration par parties, donner ci-dessous la valeur exacte de $\int_0^1 t^2 e^t dt$.

$$\int_0^1 t^2 e^t dt =$$

Pour justifications, écrire ci-dessous les calculs effectués. La rédaction ne sera pas évaluée.

Rappel de cours¹ :

Soient X et Y des variables aléatoires et a un réel : $V(aX) = a^2 V(X)$. De plus, si X et Y sont indépendantes, alors : $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$. En particulier : $V(X+a) = V(X)$.

Dans un article² de « 20minutes.fr » datant de mai 2017, on peut lire :

500 000 usagers prennent chaque jour le métro, tram ou bus à Toulouse.

Tisséo³ estime qu'il y a environ 26 000, soit 5,2 % qui fraudent.

La fraude représente un manque à gagner estimé à 10 millions € / an, soit environ 27 000 € / jour.

Les vérificateurs dressent 16 000 PV par an. Comme ils prennent la carte bancaire, 22 % sont payés immédiatement. Mais le taux de recouvrement global n'est que de 48 %.

On suppose que l'entreprise Tisséo désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes.

Elle effectue une étude basée sur 2 trajets par jour pendant les 20 jours ouvrables d'un mois, soit au total 40 trajets. On suppose que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité p pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à 5 %.

Chris K. – fripouille bien connue dans son quartier – fraude systématiquement lors des 40 trajets étudiés : en cas de contrôle, il paiera immédiatement une amende de 60 €. Un trajet lui coûterait 1,60 €.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de trajets où Chris a été contrôlé : on admet que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,05$.

1. Calculer la probabilité que Chris soit contrôlé au moins une fois.
2. a. Calculer l'espérance de X , notée $E(X)$, et interpréter ce résultat.
b. Calculer la variance de X , notée $V(X)$.
3. Soit Z la variable aléatoire donnant le gain algébrique réalisé par Chris.
 - a. Justifier rapidement que $Z = 64 - 60X$.
 - b. Calculer $E(Z)$.
 - c. La fraude systématique est-elle favorable pour Chris ?
4. Pour quelles valeurs de p la fraude systématique n'est-elle pas favorable à Chris ? Autrement dit, déterminer la proportion minimale d'usagers que la compagnie doit contrôler par mois afin que la fraude systématique ne soit pas favorable pour Chris : on donnera une valeur approchée en pourcentage, arrondie à 0,01 %.
5. Déterminer la variance de Z , notée $V(Z)$.

1 *La bonté n'est pas naturelle : c'est le fruit pierreux de la raison.* [Jules Renard, *Journal*, 10 août 1904, éd. Robert Laffont]

2 www.20minutes.fr/toulouse/2068435-20170516-toulouse-cinq-choses-fraudeurs-metro-savent-encore

3 Tisséo est la marque commerciale du réseau de transports en commun de Toulouse et sa région, soit cent une communes.