

Cette fiche propose 100 exercices aléatoires (corrigés !) de résolutions d'équations diophantiennes du type $ax + by = c$ avec a , b et c compris entre 0 et 100.

* pas de solutions ** coefficients premiers entre eux *** coefficients non premiers entre eux
 Le symbole ♥ indique une équation diophantienne dont une solution particulière est évidente et ne nécessite donc pas de remonter un algorithme d'Euclide pour déterminer les coefficients de Bézout.
 Le symbole # indique une équation diophantienne qui, après division par le PGCD de a et b , est du type $x + by = c$ ou $ax + y = c$, et qui est donc rapidement résolue.

**	♥	Exercice n°1 :	résoudre l'équation diophantienne	$5x + 52y = 84$.
*		Exercice n°2 :	résoudre l'équation diophantienne	$100x + 90y = 89$.
**		Exercice n°3 :	résoudre l'équation diophantienne	$41x + 86y = 70$.
**		Exercice n°4 :	résoudre l'équation diophantienne	$88x + 75y = 17$.
**		Exercice n°5 :	résoudre l'équation diophantienne	$87x + 86y = 25$.
*		Exercice n°6 :	résoudre l'équation diophantienne	$72x + 2y = 67$.
***		Exercice n°7 :	résoudre l'équation diophantienne	$26x + 48y = 28$.
**	♥	Exercice n°8 :	résoudre l'équation diophantienne	$33x + 91y = 66$.
***		Exercice n°9 :	résoudre l'équation diophantienne	$33x + 63y = 51$.
**		Exercice n°10 :	résoudre l'équation diophantienne	$15x + 4y = 93$.
**		Exercice n°11 :	résoudre l'équation diophantienne	$83x + 19y = 69$.
*		Exercice n°12 :	résoudre l'équation diophantienne	$26x + 88y = 31$.
**		Exercice n°13 :	résoudre l'équation diophantienne	$42x + 37y = 12$.
**		Exercice n°14 :	résoudre l'équation diophantienne	$83x + 42y = 65$.
**		Exercice n°15 :	résoudre l'équation diophantienne	$51x + 61y = 62$.
***		Exercice n°16 :	résoudre l'équation diophantienne	$60x + 62y = 44$.
*		Exercice n°17 :	résoudre l'équation diophantienne	$48x + 80y = 21$.
**		Exercice n°18 :	résoudre l'équation diophantienne	$65x + 43y = 53$.
***		Exercice n°19 :	résoudre l'équation diophantienne	$60x + 85y = 20$.
***		Exercice n°20 :	résoudre l'équation diophantienne	$90x + 86y = 50$.
*		Exercice n°21 :	résoudre l'équation diophantienne	$7x + 14y = 46$.
***		Exercice n°22 :	résoudre l'équation diophantienne	$88x + 28y = 16$.
**		Exercice n°23 :	résoudre l'équation diophantienne	$37x + 25y = 64$.
*		Exercice n°24 :	résoudre l'équation diophantienne	$24x + 76y = 46$.
*		Exercice n°25 :	résoudre l'équation diophantienne	$78x + 69y = 16$.
***		Exercice n°26 :	résoudre l'équation diophantienne	$70x + 64y = 38$.
**		Exercice n°27 :	résoudre l'équation diophantienne	$68x + 11y = 65$.
**		Exercice n°28 :	résoudre l'équation diophantienne	$76x + 39y = 61$.
***		Exercice n°29 :	résoudre l'équation diophantienne	$93x + 42y = 99$.
*		Exercice n°30 :	résoudre l'équation diophantienne	$15x + 10y = 32$.
**		Exercice n°31 :	résoudre l'équation diophantienne	$49x + 87y = 77$.
***	#	Exercice n°32 :	résoudre l'équation diophantienne	$2x + 60y = 24$.
***	#	Exercice n°33 :	résoudre l'équation diophantienne	$18x + 9y = 18$.
***	♥	Exercice n°34 :	résoudre l'équation diophantienne	$62x + 32y = 94$.
**	♥	Exercice n°35 :	résoudre l'équation diophantienne	$31x + 83y = 83$.
**		Exercice n°36 :	résoudre l'équation diophantienne	$6x + 79y = 7$.
**		Exercice n°37 :	résoudre l'équation diophantienne	$89x + 3y = 10$.
**		Exercice n°38 :	résoudre l'équation diophantienne	$57x + 100y = 33$.
***		Exercice n°39 :	résoudre l'équation diophantienne	$86x + y = 19$.
***		Exercice n°40 :	résoudre l'équation diophantienne	$82x + 80y = 32$.
**		Exercice n°41 :	résoudre l'équation diophantienne	$93x + 32y = 39$.
***	#	Exercice n°42 :	résoudre l'équation diophantienne	$2x + 84y = 18$.
***		Exercice n°43 :	résoudre l'équation diophantienne	$98x + 18y = 66$.
***		Exercice n°44 :	résoudre l'équation diophantienne	$51x + 24y = 42$.

*** # Exercice n°45 : résoudre l'équation diophantienne $3x + 96y = 24$.
 ** Exercice n°46 : résoudre l'équation diophantienne $47x + 20y = 8$.
 ** Exercice n°47 : résoudre l'équation diophantienne $11x + 4y = 9$.
 ** Exercice n°48 : résoudre l'équation diophantienne $22x + 91y = 16$.
 *** Exercice n°49 : résoudre l'équation diophantienne $74x + 90y = 66$.
 *** ♥ Exercice n°50 : résoudre l'équation diophantienne $14x + 63y = 63$.
 * Exercice n°51 : résoudre l'équation diophantienne $93x + 87y = 41$.
 ** Exercice n°52 : résoudre l'équation diophantienne $12x + 67y = 77$.
 ** Exercice n°53 : résoudre l'équation diophantienne $88x + 91y = 89$.
 ** ♥ Exercice n°54 : résoudre l'équation diophantienne $67x + 50y = 67$.
 * Exercice n°55 : résoudre l'équation diophantienne $80x + 95y = 61$.
 *** ♥ Exercice n°56 : résoudre l'équation diophantienne $100x + 18y = 64$.
 * Exercice n°57 : résoudre l'équation diophantienne $90x + 51y = 2$.
 ** Exercice n°58 : résoudre l'équation diophantienne $69x + 74y = 11$.
 *** Exercice n°59 : résoudre l'équation diophantienne $98x + 62y = 96$.
 *** Exercice n°60 : résoudre l'équation diophantienne $50x + 78y = 26$.
 *** Exercice n°61 : résoudre l'équation diophantienne $74x + 10y = 66$.
 ** Exercice n°62 : résoudre l'équation diophantienne $81x + 46y = 23$.
 *** ♥ Exercice n°63 : résoudre l'équation diophantienne $72x + 57y = 60$.
 ** ♥ Exercice n°64 : résoudre l'équation diophantienne $74x + 17y = 74$.
 *** # Exercice n°65 : résoudre l'équation diophantienne $2x + 54y = 6$.
 *** Exercice n°66 : résoudre l'équation diophantienne $69x + 63y = 84$.
 ** Exercice n°67 : résoudre l'équation diophantienne $91x + 48y = 23$.
 *** ♥ Exercice n°68 : résoudre l'équation diophantienne $70x + 22y = 48$.
 ** Exercice n°69 : résoudre l'équation diophantienne $79x + 89y = 26$.
 ** Exercice n°70 : résoudre l'équation diophantienne $45x + 26y = 34$.
 * Exercice n°71 : résoudre l'équation diophantienne $87x + 24y = 37$.
 *** ♥ Exercice n°72 : résoudre l'équation diophantienne $51x + 45y = 6$.
 *** ♥ Exercice n°73 : résoudre l'équation diophantienne $24x + 44y = 8$.
 *** ♥ Exercice n°74 : résoudre l'équation diophantienne $33x + 78y = 66$.
 *** Exercice n°75 : résoudre l'équation diophantienne $16x + 94y = 24$.
 ** Exercice n°76 : résoudre l'équation diophantienne $41x + 24y = 13$.
 *** Exercice n°77 : résoudre l'équation diophantienne $70x + 46y = 34$.
 * Exercice n°78 : résoudre l'équation diophantienne $52x + 86y = 25$.
 *** Exercice n°79 : résoudre l'équation diophantienne $6x + y = 100$.
 ** ♥ Exercice n°80 : résoudre l'équation diophantienne $31x + 30y = 30$.
 *** # Exercice n°81 : résoudre l'équation diophantienne $30x + 2y = 26$.
 ** ♥ Exercice n°82 : résoudre l'équation diophantienne $97x + 56y = 15$.
 *** Exercice n°83 : résoudre l'équation diophantienne $22x + 92y = 98$.
 ** Exercice n°84 : résoudre l'équation diophantienne $21x + 55y = 46$.
 *** Exercice n°85 : résoudre l'équation diophantienne $82x + 74y = 38$.
 ** Exercice n°86 : résoudre l'équation diophantienne $2x + 71y = 54$.
 * Exercice n°87 : résoudre l'équation diophantienne $6x + 70y = 73$.
 *** Exercice n°88 : résoudre l'équation diophantienne $15x + 93y = 90$.
 *** Exercice n°89 : résoudre l'équation diophantienne $54x + 56y = 92$.
 * Exercice n°90 : résoudre l'équation diophantienne $55x + 11y = 6$.
 ** Exercice n°91 : résoudre l'équation diophantienne $84x + 97y = 91$.
 *** Exercice n°92 : résoudre l'équation diophantienne $32x + 14y = 44$.
 *** Exercice n°93 : résoudre l'équation diophantienne $69x + 60y = 45$.
 * Exercice n°94 : résoudre l'équation diophantienne $34x + 24y = 43$.
 ** ♥ Exercice n°95 : résoudre l'équation diophantienne $29x + 15y = 59$.
 *** Exercice n°96 : résoudre l'équation diophantienne $66x + 56y = 88$.
 *** Exercice n°97 : résoudre l'équation diophantienne $75x + 6y = 78$.
 *** Exercice n°98 : résoudre l'équation diophantienne $33x + 87y = 51$.
 *** Exercice n°99 : résoudre l'équation diophantienne $62x + 68y = 28$.
 ** Exercice n°100 : résoudre l'équation diophantienne $99x + 83y = 19$.

Exercice n°1 : résoudre l'équation diophantienne $5x + 52y = 84$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 52 et 5 :

$$(1) \quad 52 = 5 \times 10 + 2$$

$$(2) \quad 5 = 2 \times 2 + 1$$

$$(3) \quad 2 = 1 \times 2 + 0$$

donc $\text{PGCD}(5, 52) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est $(-4, 2)$.

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 52 et 5) et en multipliant par 84, on aurait trouvé la solution particulière $(1764, -168)$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $5x + 52y = 84$:

$$5x + 52y = 84 \text{ et } 5 \times (-4) + 52 \times 2 = 84$$

$$\text{donc, par soustraction : } 5(x + 4) + 52(y - 2) = 0$$

$$\text{donc } 5(x + 4) = 52(2 - y). \quad (*)$$

Or, 5 et 52 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $5 \mid 2 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $2 - y = 5k$

et alors, d'après (*): $x + 4 = 52k$.

• Réciproquement, si $x = -4 + 52k$ et $y = 2 - 5k$ alors :

$$5x + 52y = 5(-4 + 52k) + 52(2 - 5k) = \dots \text{ (à faire) } = 84.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $5x + 52y = 84$ sont les couples $(-4 + 52k, 2 - 5k)$, où k entier relatif.

Exercice n°2 : résoudre l'équation diophantienne $100x + 90y = 89$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 100 et 90 :

$$(1) \quad 100 = 90 \times 1 + 10$$

$$(2) \quad 90 = 10 \times 9 + 0$$

donc $\text{PGCD}(100, 90) = 10$.

• $89 = 10 \times 8 + 9$ donc 10 ne divise pas 89

donc l'équation diophantienne $100x + 90y = 89$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°3 : résoudre l'équation diophantienne $41x + 86y = 70$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 86 et 41 :

$$(1) \quad 86 = 41 \times 2 + 4$$

$$(2) \quad 41 = 4 \times 10 + 1$$

$$(3) \quad 4 = 1 \times 4 + 0$$

donc $\text{PGCD}(41, 86) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(2) \quad 1 = 41 \times 1 + 4 \times (-10)$$

$$(1) \quad 1 = 41 \times 1 + (86 - 41 \times 2) \times (-10)$$

$$1 = 86 \times (-10) + 41 \times 21$$

On a donc : $41 \times 21 + 86 \times (-10) = 1$

puis en multipliant par 70 : $41 \times 1470 + 86 \times (-700) = 70$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $41x + 86y = 70$:

$$41x + 86y = 70 \text{ et } 41 \times 1470 + 86 \times (-700) = 70$$

$$\text{donc, par soustraction : } 41(x - 1470) + 86(y + 700) = 0$$

$$\text{donc } 41(x - 1470) = 86(-700 - y). \quad (*)$$

Or, 41 et 86 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $41 \mid -700 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-700 - y = 41k$

et alors, d'après (*): $x - 1470 = 86k$.

• Réciproquement, si $x = 1470 + 86k$ et $y = -700 - 41k$ alors :

$$41x + 86y = 41(1470 + 86k) + 86(-700 - 41k) = \dots \text{ (à faire)} = 70.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $41x + 86y = 70$ sont les couples $(1470 + 86k, -700 - 41k)$, où k entier relatif.

Exercice n°4 : résoudre l'équation diophantienne $88x + 75y = 17$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 88 et 75 :

$$\begin{aligned}(1) \quad & 88 = 75 \times 1 + 13 \\(2) \quad & 75 = 13 \times 5 + 10 \\(3) \quad & 13 = 10 \times 1 + 3 \\(4) \quad & 10 = 3 \times 3 + 1 \\(5) \quad & 3 = 1 \times 3 + 0\end{aligned}$$

donc $\text{PGCD}(88, 75) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}(4) \quad & 1 = 10 \times 1 + 3 \times (-3) \\(3) \quad & 1 = 10 \times 1 + (13 - 10 \times 1) \times (-3) \\& 1 = 13 \times (-3) + 10 \times 4 \\(2) \quad & 1 = 13 \times -3 + (75 - 13 \times 5) \times 4 \\& 1 = 75 \times 4 + 13 \times (-23) \\(1) \quad & 1 = 75 \times 4 + (88 - 75 \times 1) \times (-23) \\& 1 = 88 \times (-23) + 75 \times 27\end{aligned}$$

On a donc : $88 \times (-23) + 75 \times 27 = 1$

puis en multipliant par 17 : $88 \times (-391) + 75 \times 459 = 17$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $88x + 75y = 17$:

$$88x + 75y = 17 \text{ et } 88 \times (-391) + 75 \times 459 = 17$$

$$\text{donc, par soustraction : } 88(x + 391) + 75(y - 459) = 0$$

$$\text{donc } 88(x + 391) = 75(459 - y). \quad (*)$$

Or, 88 et 75 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $88 \mid 459 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $459 - y = 88k$

et alors, d'après (*): $x + 391 = 75k$.

• Réciproquement, si $x = -391 + 75k$ et $y = 459 - 88k$ alors :

$$88x + 75y = 88(-391 + 75k) + 75(459 - 88k) = \dots \text{ (à faire)} = 17.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $88x + 75y = 17$ sont les couples $(-391 + 75k, 459 - 88k)$, où k entier relatif.

Exercice n°5 : résoudre l'équation diophantienne $87x + 86y = 25$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 87 et 86 :

$$(1) \quad 87 = 86 \times 1 + 1$$

$$(2) \quad 86 = 1 \times 86 + 0$$

donc $\text{PGCD}(87, 86) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(1) \quad 1 = 87 \times 1 + 86 \times (-1)$$

Puis en multipliant par 25 : $87 \times 25 + 86 \times (-25) = 25$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $87x + 86y = 25$:

$$87x + 86y = 25 \text{ et } 87 \times 25 + 86 \times (-25) = 25$$

$$\text{donc, par soustraction : } 87(x - 25) + 86(y + 25) = 0$$

$$\text{donc } 87(x - 25) = 86(-25 - y). \quad (*)$$

Or, 87 et 86 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $87 \mid -25 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-25 - y = 87k$

et alors, d'après (*): $x - 25 = 86k$.

• Réciproquement, si $x = 25 + 86k$ et $y = -25 - 87k$ alors :

$$87x + 86y = 87(25 + 86k) + 86(-25 - 87k) = \dots \text{ (à faire) } = 25.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $87x + 86y = 25$ sont les couples $(25 + 86k, -25 - 87k)$, où k entier relatif.

Exercice n°6 : résoudre l'équation diophantienne $72x + 2y = 67$.

CORRECTION

- $72 = 2 \times 36$
donc $\text{PGCD}(72, 2) = 2$.

- $67 = 2 \times 33 + 1$ donc 2 ne divise pas 67
donc l'équation diophantienne $72x + 2y = 67$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°7 : résoudre l'équation diophantienne $26x + 48y = 28$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 48 et 26 :

$$(1) \quad 48 = 26 \times 1 + 22$$

$$(2) \quad 26 = 22 \times 1 + 4$$

$$(3) \quad 22 = 4 \times 5 + 2$$

$$(4) \quad 4 = 2 \times 2 + 0$$

donc $\text{PGCD}(26, 48) = 2$.

En divisant par $\text{PGCD}(26, 48)$: $26x + 48y = 28 \Leftrightarrow 13x + 24y = 14$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 13 et 24 :

$$(1) \quad 24 = 13 \times 1 + 11$$

$$(2) \quad 13 = 11 \times 1 + 2$$

$$(3) \quad 11 = 2 \times 5 + 1$$

$$(4) \quad 2 = 1 \times 2 + 0$$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(3) \quad 1 = 11 \times 1 + 2 \times (-5)$$

$$(2) \quad 1 = 11 \times 1 + (13 - 11 \times 1) \times (-5)$$

$$1 = 13 \times (-5) + 11 \times 6$$

$$(1) \quad 1 = 13 \times (-5) + (24 - 13 \times 1) \times 6$$

$$1 = 24 \times 6 + 13 \times (-11)$$

On a donc : $13 \times (-11) + 24 \times 6 = 1$

puis en multipliant par 14 : $13 \times (-154) + 24 \times 84 = 14$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $13x + 24y = 14$:

$$13x + 24y = 14 \text{ et } 13 \times (-154) + 24 \times 84 = 14$$

$$\text{donc, par soustraction : } 13(x + 154) + 24(y - 84) = 0$$

$$\text{donc } 13(x + 154) = 24(84 - y). \quad (*)$$

Or, 13 et 24 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $13 \mid 84 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $84 - y = 13k$

et alors, d'après (*): $x + 154 = 24k$.

• Réciproquement, si $x = -154 + 24k$ et $y = 84 - 13k$ alors :

$$13x + 24y = 13(-154 + 24k) + 24(84 - 13k) = \dots \text{ (à faire)} = 14.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $26x + 48y = 28$ sont les couples $(-154 + 24k, 84 - 13k)$, où k entier relatif.

Exercice n°8 : résoudre l'équation diophantienne $33x + 91y = 66$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 91 et 33 :

$$(1) \quad 91 = 33 \times 2 + 25$$

$$(2) \quad 33 = 25 \times 1 + 8$$

$$(3) \quad 25 = 8 \times 3 + 1$$

$$(4) \quad 8 = 1 \times 8 + 0$$

donc $\text{PGCD}(33, 91) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est $(2, 0)$.

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 91 et 33) et en multipliant par 66, on aurait trouvé la solution particulière $(-726, 264)$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $33x + 91y = 66$:

$$33x + 91y = 66 \text{ et } 33 \times 2 + 91 \times 0 = 66$$

$$\text{donc, par soustraction : } 33(x - 2) + 91y = 0$$

$$\text{donc } 33(x - 2) = -91y. \quad (*)$$

Or, 33 et 91 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $33 \mid -y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-y = 33k$

et alors, d'après (*): $x - 2 = 91k$.

• Réciproquement, si $x = 2 + 91k$ et $y = -33k$ alors :

$$33x + 91y = 33(2 + 91k) + 91(-33k) = \dots \text{ (à faire) } = 66.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $33x + 91y = 66$ sont les couples $(2 + 91k, -33k)$, où k entier relatif.

Exercice n°9 : résoudre l'équation diophantienne $33x + 63y = 51$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 63 et 33 :

$$(1) \quad 63 = 33 \times 1 + 30$$

$$(2) \quad 33 = 30 \times 1 + 3$$

$$(3) \quad 30 = 3 \times 10 + 0$$

donc $\text{PGCD}(33, 63) = 3$.

En divisant par $\text{PGCD}(33, 63)$: $33x + 63y = 51 \Leftrightarrow 11x + 21y = 17$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 11 et 21 :

$$(1) \quad 21 = 11 \times 1 + 10$$

$$(2) \quad 11 = 10 \times 1 + 1$$

$$(3) \quad 10 = 1 \times 10 + 0$$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(2) \quad 1 = 11 \times 1 + 10 \times (-1)$$

$$(1) \quad 1 = 11 \times 1 + (21 - 11 \times 1) \times (-1)$$

$$1 = 21 \times (-1) + 11 \times 2$$

On a donc : $11 \times 2 + 21 \times (-1) = 1$

puis en multipliant par 17 : $11 \times 34 + 21 \times (-17) = 17$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $11x + 21y = 17$:

$$11x + 21y = 17 \text{ et } 11 \times 34 + 21 \times (-17) = 17$$

$$\text{donc, par soustraction : } 11(x - 34) + 21(y + 17) = 0$$

$$\text{donc } 11(x - 34) = 21(-17 - y). \quad (*)$$

Or, 11 et 21 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $11 \mid -17 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-17 - y = 11k$

et alors, d'après (*): $x - 34 = 21k$.

• Réciproquement, si $x = 34 + 21k$ et $y = -17 - 11k$ alors :

$$11x + 21y = 11(34 + 21k) + 21(-17 - 11k) = \dots \text{ (à faire)} = 17.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $33x + 63y = 51$ sont les couples $(34 + 21k, -17 - 11k)$, où k entier relatif.

Exercice n°10 : résoudre l'équation diophantienne $15x + 4y = 93$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 15 et 4 :

$$(1) \quad 15 = 4 \times 3 + 3$$

$$(2) \quad 4 = 3 \times 1 + 1$$

$$(3) \quad 3 = 1 \times 3 + 0$$

donc $\text{PGCD}(15, 4) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(2) \quad 1 = 4 \times 1 + 3 \times (-1)$$

$$(1) \quad 1 = 4 \times 1 + (15 - 4 \times 3) \times (-1)$$

$$1 = 15 \times (-1) + 4 \times 4$$

On a donc : $15 \times (-1) + 4 \times 4 = 1$

puis en multipliant par 93 : $15 \times (-93) + 4 \times 372 = 93$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $15x + 4y = 93$:

$$15x + 4y = 93 \text{ et } 15 \times (-93) + 4 \times 372 = 93$$

$$\text{donc, par soustraction : } 15(x + 93) + 4(y - 372) = 0$$

$$\text{donc } 15(x + 93) = 4(372 - y). \quad (*)$$

Or, 15 et 4 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $15 \mid 372 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $372 - y = 15k$

et alors, d'après (*): $x + 93 = 4k$.

• Réciproquement, si $x = -93 + 4k$ et $y = 372 - 15k$ alors :

$$15x + 4y = 15(-93 + 4k) + 4(372 - 15k) = \dots \text{ (à faire) } = 93.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $15x + 4y = 93$ sont les couples $(-93 + 4k, 372 - 15k)$, où k entier relatif.

Exercice n°11 : résoudre l'équation diophantienne $83x + 19y = 69$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 83 et 19 :

$$\begin{aligned}(1) \quad & 83 = 19 \times 4 + 7 \\(2) \quad & 19 = 7 \times 2 + 5 \\(3) \quad & 7 = 5 \times 1 + 2 \\(4) \quad & 5 = 2 \times 2 + 1 \\(5) \quad & 2 = 1 \times 2 + 0\end{aligned}$$

donc $\text{PGCD}(83, 19) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}(4) \quad & 1 = 5 \times 1 + 2 \times (-2) \\(3) \quad & 1 = 5 \times 1 + (7-5 \times 1) \times (-2) \\& 1 = 7 \times (-2) + 5 \times 3 \\(2) \quad & 1 = 7 \times -2 + (19-7 \times 2) \times 3 \\& 1 = 19 \times 3 + 7 \times (-8) \\(1) \quad & 1 = 19 \times 3 + (83-19 \times 4) \times (-8) \\& 1 = 83 \times (-8) + 19 \times 35\end{aligned}$$

On a donc : $83 \times (-8) + 19 \times 35 = 1$

puis en multipliant par 69 : $83 \times (-552) + 19 \times 2415 = 69$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $83x + 19y = 69$:

$$83x + 19y = 69 \text{ et } 83 \times (-552) + 19 \times 2415 = 69$$

$$\text{donc, par soustraction : } 83(x + 552) + 19(y - 2415) = 0$$

$$\text{donc } 83(x + 552) = 19(2415 - y). \quad (*)$$

Or, 83 et 19 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $83 \mid 2415 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $2415 - y = 83k$

et alors, d'après (*): $x + 552 = 19k$.

• Réciproquement, si $x = -552 + 19k$ et $y = 2415 - 83k$ alors :

$$83x + 19y = 83(-552 + 19k) + 19(2415 - 83k) = \dots \text{ (à faire)} = 69.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $83x + 19y = 69$ sont les couples $(-552 + 19k, 2415 - 83k)$, où k entier relatif.

Exercice n°12 : résoudre l'équation diophantienne $26x + 88y = 31$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 88 et 26 :

$$(1) \quad 88 = 26 \times 3 + 10$$

$$(2) \quad 26 = 10 \times 2 + 6$$

$$(3) \quad 10 = 6 \times 1 + 4$$

$$(4) \quad 6 = 4 \times 1 + 2$$

$$(5) \quad 4 = 2 \times 2 + 0$$

donc $\text{PGCD}(26, 88) = 2$.

• $31 = 2 \times 15 + 1$ donc 2 ne divise pas 31

donc l'équation diophantienne $26x + 88y = 31$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°13 : résoudre l'équation diophantienne $42x + 37y = 12$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 42 et 37 :

$$(1) \quad 42 = 37 \times 1 + 5$$

$$(2) \quad 37 = 5 \times 7 + 2$$

$$(3) \quad 5 = 2 \times 2 + 1$$

$$(4) \quad 2 = 1 \times 2 + 0$$

donc $\text{PGCD}(42, 37) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(3) \quad 1 = 5 \times 1 + 2 \times (-2)$$

$$(2) \quad 1 = 5 \times 1 + (37 - 5 \times 7) \times (-2)$$

$$1 = 37 \times (-2) + 5 \times 15$$

$$(1) \quad 1 = 37 \times -2 + (42 - 37 \times 1) \times 15$$

$$1 = 42 \times 15 + 37 \times (-17)$$

On a donc : $42 \times 15 + 37 \times (-17) = 1$

puis en multipliant par 12 : $42 \times 180 + 37 \times (-204) = 12$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $42x + 37y = 12$:

$$42x + 37y = 12 \text{ et } 42 \times 180 + 37 \times (-204) = 12$$

$$\text{donc, par soustraction : } 42(x - 180) + 37(y + 204) = 0$$

$$\text{donc } 42(x - 180) = 37(-204 - y). \quad (*)$$

Or, 42 et 37 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $42 \mid -204 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-204 - y = 42k$

et alors, d'après (*): $x - 180 = 37k$.

• Réciproquement, si $x = 180 + 37k$ et $y = -204 - 42k$ alors :

$$42x + 37y = 42(180 + 37k) + 37(-204 - 42k) = \dots \text{ (à faire)} = 12.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $42x + 37y = 12$ sont les couples $(180 + 37k, -204 - 42k)$, où k entier relatif.

Exercice n°14 : résoudre l'équation diophantienne $83x + 42y = 65$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 83 et 42 :

$$(1) \quad 83 = 42 \times 1 + 41$$

$$(2) \quad 42 = 41 \times 1 + 1$$

$$(3) \quad 41 = 1 \times 41 + 0$$

donc $\text{PGCD}(83, 42) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(2) \quad 1 = 42 \times 1 + 41 \times (-1)$$

$$(1) \quad 1 = 42 \times 1 + (83 - 42 \times 1) \times (-1)$$

$$1 = 83 \times (-1) + 42 \times 2$$

On a donc : $83 \times (-1) + 42 \times 2 = 1$

puis en multipliant par 65 : $83 \times (-65) + 42 \times 130 = 65$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $83x + 42y = 65$:

$$83x + 42y = 65 \text{ et } 83 \times (-65) + 42 \times 130 = 65$$

$$\text{donc, par soustraction : } 83(x + 65) + 42(y - 130) = 0$$

$$\text{donc } 83(x + 65) = 42(130 - y). \quad (*)$$

Or, 83 et 42 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $83 \mid 130 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $130 - y = 83k$

et alors, d'après (*): $x + 65 = 42k$.

• Réciproquement, si $x = -65 + 42k$ et $y = 130 - 83k$ alors :

$$83x + 42y = 83(-65 + 42k) + 42(130 - 83k) = \dots \text{ (à faire)} = 65.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $83x + 42y = 65$ sont les couples $(-65 + 42k, 130 - 83k)$, où k entier relatif.

Exercice n°15 : résoudre l'équation diophantienne $51x + 61y = 62$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 61 et 51 :

$$(1) \quad 61 = 51 \times 1 + 10$$

$$(2) \quad 51 = 10 \times 5 + 1$$

$$(3) \quad 10 = 1 \times 10 + 0$$

donc $\text{PGCD}(51, 61) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(2) \quad 1 = 51 \times 1 + 10 \times (-5)$$

$$(1) \quad 1 = 51 \times 1 + (61 - 51 \times 1) \times (-5)$$

$$1 = 61 \times (-5) + 51 \times 6$$

On a donc : $51 \times 6 + 61 \times (-5) = 1$

puis en multipliant par 62 : $51 \times 372 + 61 \times (-310) = 62$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $51x + 61y = 62$:

$$51x + 61y = 62 \text{ et } 51 \times 372 + 61 \times (-310) = 62$$

$$\text{donc, par soustraction : } 51(x - 372) + 61(y + 310) = 0$$

$$\text{donc } 51(x - 372) = 61(-310 - y). \quad (*)$$

Or, 51 et 61 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $51 \mid -310 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-310 - y = 51k$

et alors, d'après (*): $x - 372 = 61k$.

• Réciproquement, si $x = 372 + 61k$ et $y = -310 - 51k$ alors :

$$51x + 61y = 51(372 + 61k) + 61(-310 - 51k) = \dots \text{ (à faire)} = 62.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $51x + 61y = 62$ sont les couples $(372 + 61k, -310 - 51k)$, où k entier relatif.

Exercice n°16 : résoudre l'équation diophantienne $60x + 62y = 44$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 62 et 60 :

$$(1) \quad 62 = 60 \times 1 + 2$$

$$(2) \quad 60 = 2 \times 30 + 0$$

donc $\text{PGCD}(60, 62) = 2$.

En divisant par $\text{PGCD}(60, 62)$: $60x + 62y = 44 \Leftrightarrow 30x + 31y = 22$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 30 et 31 :

$$(1) \quad 31 = 30 \times 1 + 1$$

$$(2) \quad 30 = 1 \times 30 + 0$$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(1) \quad 1 = 31 \times 1 + 30 \times (-1)$$

On a donc : $30 \times (-1) + 31 \times 1 = 1$

puis en multipliant par 22 : $30 \times (-22) + 31 \times 22 = 22$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $30x + 31y = 22$:

$$30x + 31y = 22 \text{ et } 30 \times (-22) + 31 \times 22 = 22$$

$$\text{donc, par soustraction : } 30(x + 22) + 31(y - 22) = 0$$

$$\text{donc } 30(x + 22) = 31(22 - y). \quad (*)$$

Or, 30 et 31 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $30 \mid 22 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $22 - y = 30k$

et alors, d'après (*): $x + 22 = 31k$.

• Réciproquement, si $x = -22 + 31k$ et $y = 22 - 30k$ alors :

$$30x + 31y = 30(-22 + 31k) + 31(22 - 30k) = \dots \text{ (à faire) } = 22.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $60x + 62y = 44$ sont les couples $(-22 + 31k, 22 - 30k)$, où k entier relatif.

Exercice n°17 : résoudre l'équation diophantienne $48x + 80y = 21$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 80 et 48 :

$$(1) \quad 80 = 48 \times 1 + 32$$

$$(2) \quad 48 = 32 \times 1 + 16$$

$$(3) \quad 32 = 16 \times 2 + 0$$

donc $\text{PGCD}(48, 80) = 16$.

• $21 = 16 \times 1 + 5$ donc 16 ne divise pas 21

donc l'équation diophantienne $48x + 80y = 21$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°18 : résoudre l'équation diophantienne $65x + 43y = 53$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 65 et 43 :

$$(1) \quad 65 = 43 \times 1 + 22$$

$$(2) \quad 43 = 22 \times 1 + 21$$

$$(3) \quad 22 = 21 \times 1 + 1$$

$$(4) \quad 21 = 1 \times 21 + 0$$

donc $\text{PGCD}(65, 43) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(3) \quad 1 = 22 \times 1 + 21 \times (-1)$$

$$(2) \quad 1 = 22 \times 1 + (43 - 22 \times 1) \times (-1)$$

$$1 = 43 \times (-1) + 22 \times 2$$

$$(1) \quad 1 = 43 \times (-1) + (65 - 43 \times 1) \times 2$$

$$1 = 65 \times 2 + 43 \times (-3)$$

On a donc : $65 \times 2 + 43 \times (-3) = 1$

puis en multipliant par 53 : $65 \times 106 + 43 \times (-159) = 53$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $65x + 43y = 53$:

$$65x + 43y = 53 \text{ et } 65 \times 106 + 43 \times (-159) = 53$$

$$\text{donc, par soustraction : } 65(x - 106) + 43(y + 159) = 0$$

$$\text{donc } 65(x - 106) = 43(-159 - y). \quad (*)$$

Or, 65 et 43 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $65 \mid -159 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-159 - y = 65k$

et alors, d'après (*): $x - 106 = 43k$.

• Réciproquement, si $x = 106 + 43k$ et $y = -159 - 65k$ alors :

$$65x + 43y = 65(106 + 43k) + 43(-159 - 65k) = \dots \text{ (à faire) } = 53.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $65x + 43y = 53$ sont les couples $(106 + 43k, -159 - 65k)$, où k entier relatif.

Exercice n°19 : résoudre l'équation diophantienne $60x + 85y = 20$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 85 et 60 :

$$(1) \quad 85 = 60 \times 1 + 25$$

$$(2) \quad 60 = 25 \times 2 + 10$$

$$(3) \quad 25 = 10 \times 2 + 5$$

$$(4) \quad 10 = 5 \times 2 + 0$$

donc $\text{PGCD}(60, 85) = 5$.

En divisant par $\text{PGCD}(60, 85)$: $60x + 85y = 20 \Leftrightarrow 12x + 17y = 4$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 12 et 17 :

$$(1) \quad 17 = 12 \times 1 + 5$$

$$(2) \quad 12 = 5 \times 2 + 2$$

$$(3) \quad 5 = 2 \times 2 + 1$$

$$(4) \quad 2 = 1 \times 2 + 0$$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(3) \quad 1 = 5 \times 1 + 2 \times (-2)$$

$$(2) \quad 1 = 5 \times 1 + (12 - 5 \times 2) \times (-2)$$

$$1 = 12 \times (-2) + 5 \times 5$$

$$(1) \quad 1 = 12 \times -2 + (17 - 12 \times 1) \times 5$$

$$1 = 17 \times 5 + 12 \times (-7)$$

On a donc : $12 \times (-7) + 17 \times 5 = 1$

puis en multipliant par 4 : $12 \times (-28) + 17 \times 20 = 4$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $12x + 17y = 4$:

$$12x + 17y = 4 \text{ et } 12 \times (-28) + 17 \times 20 = 4$$

$$\text{donc, par soustraction : } 12(x + 28) + 17(y - 20) = 0$$

$$\text{donc } 12(x + 28) = 17(20 - y). \quad (*)$$

Or, 12 et 17 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $12 \mid 20 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $20 - y = 12k$

et alors, d'après (*): $x + 28 = 17k$.

• Réciproquement, si $x = -28 + 17k$ et $y = 20 - 12k$ alors :

$$12x + 17y = 12(-28 + 17k) + 17(20 - 12k) = \dots (\text{à faire}) = 4.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $60x + 85y = 20$ sont les couples $(-28 + 17k, 20 - 12k)$, où k entier relatif.

Exercice n°20 : résoudre l'équation diophantienne $90x + 86y = 50$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 90 et 86 :

$$(1) \quad 90 = 86 \times 1 + 4$$

$$(2) \quad 86 = 4 \times 21 + 2$$

$$(3) \quad 4 = 2 \times 2 + 0$$

donc $\text{PGCD}(90, 86) = 2$.

En divisant par $\text{PGCD}(90, 86)$: $90x + 86y = 50 \Leftrightarrow 45x + 43y = 25$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 45 et 43 :

$$(1) \quad 45 = 43 \times 1 + 2$$

$$(2) \quad 43 = 2 \times 21 + 1$$

$$(3) \quad 2 = 1 \times 2 + 0$$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(2) \quad 1 = 43 \times 1 + 2 \times (-21)$$

$$(1) \quad 1 = 43 \times 1 + (45 - 43 \times 1) \times (-21)$$

$$1 = 45 \times (-21) + 43 \times 22$$

On a donc : $45 \times (-21) + 43 \times 22 = 1$

puis en multipliant par 25 : $45 \times (-525) + 43 \times 550 = 25$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $45x + 43y = 25$:

$$45x + 43y = 25 \text{ et } 45 \times (-525) + 43 \times 550 = 25$$

$$\text{donc, par soustraction : } 45(x + 525) + 43(y - 550) = 0$$

$$\text{donc } 45(x + 525) = 43(550 - y). \quad (*)$$

Or, 45 et 43 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $45 \mid 550 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $550 - y = 45k$

et alors, d'après (*): $x + 525 = 43k$.

• Réciproquement, si $x = -525 + 43k$ et $y = 550 - 45k$ alors :

$$45x + 43y = 45(-525 + 43k) + 43(550 - 45k) = \dots \text{ (à faire)} = 25.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $90x + 86y = 50$ sont les couples $(-525 + 43k, 550 - 45k)$, où k entier relatif.

Exercice n°21 : résoudre l'équation diophantienne $7x + 14y = 46$.

CORRECTION

- $14 = 7 \times 2$

donc $\text{PGCD}(7, 14) = 7$.

- $46 = 7 \times 6 + 4$ donc 7 ne divise pas 46

donc l'équation diophantienne $7x + 14y = 46$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°22 : résoudre l'équation diophantienne $88x + 28y = 16$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 88 et 28 :

$$(1) \quad 88 = 28 \times 3 + 4$$

$$(2) \quad 28 = 4 \times 7 + 0$$

donc $\text{PGCD}(88, 28) = 4$.

En divisant par $\text{PGCD}(88, 28)$: $88x + 28y = 16 \Leftrightarrow 22x + 7y = 4$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 22 et 7 :

$$(1) \quad 22 = 7 \times 3 + 1$$

$$(2) \quad 7 = 1 \times 7 + 0$$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(1) \quad 1 = 22 \times 1 + 7 \times (-3)$$

Puis en multipliant par 4 : $22 \times 4 + 7 \times (-12) = 4$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $22x + 7y = 4$:

$$22x + 7y = 4 \text{ et } 22 \times 4 + 7 \times (-12) = 4$$

donc, par soustraction : $22(x - 4) + 7(y + 12) = 0$

$$\text{donc } 22(x - 4) = 7(-12 - y). \quad (*)$$

Or, 22 et 7 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $22 \mid -12 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-12 - y = 22k$

et alors, d'après (*): $x - 4 = 7k$.

• Réciproquement, si $x = 4 + 7k$ et $y = -12 - 22k$ alors :

$$22x + 7y = 22(4 + 7k) + 7(-12 - 22k) = \dots \text{ (à faire) } = 4.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $88x + 28y = 16$ sont les couples $(4 + 7k, -12 - 22k)$, où k entier relatif.

Exercice n°23 : résoudre l'équation diophantienne $37x + 25y = 64$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 37 et 25 :

$$(1) \quad 37 = 25 \times 1 + 12$$

$$(2) \quad 25 = 12 \times 2 + 1$$

$$(3) \quad 12 = 1 \times 12 + 0$$

donc $\text{PGCD}(37, 25) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(2) \quad 1 = 25 \times 1 + 12 \times (-2)$$

$$(1) \quad 1 = 25 \times 1 + (37 - 25 \times 1) \times (-2)$$

$$1 = 37 \times (-2) + 25 \times 3$$

On a donc : $37 \times (-2) + 25 \times 3 = 1$

puis en multipliant par 64 : $37 \times (-128) + 25 \times 192 = 64$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $37x + 25y = 64$:

$$37x + 25y = 64 \text{ et } 37 \times (-128) + 25 \times 192 = 64$$

$$\text{donc, par soustraction : } 37(x + 128) + 25(y - 192) = 0$$

$$\text{donc } 37(x + 128) = 25(192 - y). \quad (*)$$

Or, 37 et 25 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $37 \mid 192 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $192 - y = 37k$

et alors, d'après (*): $x + 128 = 25k$.

• Réciproquement, si $x = -128 + 25k$ et $y = 192 - 37k$ alors :

$$37x + 25y = 37(-128 + 25k) + 25(192 - 37k) = \dots \text{ (à faire) } = 64.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $37x + 25y = 64$ sont les couples $(-128 + 25k, 192 - 37k)$, où k entier relatif.

Exercice n°24 : résoudre l'équation diophantienne $24x + 76y = 46$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 76 et 24 :

$$(1) \quad 76 = 24 \times 3 + 4$$

$$(2) \quad 24 = 4 \times 6 + 0$$

donc $\text{PGCD}(24, 76) = 4$.

• $46 = 4 \times 11 + 2$ donc 4 ne divise pas 46

donc l'équation diophantienne $24x + 76y = 46$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°25 : résoudre l'équation diophantienne $78x + 69y = 16$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 78 et 69 :

$$(1) \quad 78 = 69 \times 1 + 9$$

$$(2) \quad 69 = 9 \times 7 + 6$$

$$(3) \quad 9 = 6 \times 1 + 3$$

$$(4) \quad 6 = 3 \times 2 + 0$$

donc $\text{PGCD}(78, 69) = 3$.

• $16 = 3 \times 5 + 1$ donc 3 ne divise pas 16

donc l'équation diophantienne $78x + 69y = 16$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°26 : résoudre l'équation diophantienne $70x + 64y = 38$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 70 et 64 :

$$(1) \quad 70 = 64 \times 1 + 6$$

$$(2) \quad 64 = 6 \times 10 + 4$$

$$(3) \quad 6 = 4 \times 1 + 2$$

$$(4) \quad 4 = 2 \times 2 + 0$$

donc $\text{PGCD}(70, 64) = 2$.

En divisant par $\text{PGCD}(70, 64)$: $70x + 64y = 38 \Leftrightarrow 35x + 32y = 19$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 35 et 32 :

$$(1) \quad 35 = 32 \times 1 + 3$$

$$(2) \quad 32 = 3 \times 10 + 2$$

$$(3) \quad 3 = 2 \times 1 + 1$$

$$(4) \quad 2 = 1 \times 2 + 0$$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(3) \quad 1 = 3 \times 1 + 2 \times (-1)$$

$$(2) \quad 1 = 3 \times 1 + (32 - 3 \times 10) \times (-1)$$

$$1 = 32 \times (-1) + 3 \times 11$$

$$(1) \quad 1 = 32 \times -1 + (35 - 32 \times 1) \times 11$$

$$1 = 35 \times 11 + 32 \times (-12)$$

On a donc : $35 \times 11 + 32 \times (-12) = 1$

puis en multipliant par 19 : $35 \times 209 + 32 \times (-228) = 19$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $35x + 32y = 19$:

$$35x + 32y = 19 \text{ et } 35 \times 209 + 32 \times (-228) = 19$$

$$\text{donc, par soustraction : } 35(x - 209) + 32(y + 228) = 0$$

$$\text{donc } 35(x - 209) = 32(-228 - y). \quad (*)$$

Or, 35 et 32 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $35 \mid -228 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-228 - y = 35k$

et alors, d'après (*): $x - 209 = 32k$.

• Réciproquement, si $x = 209 + 32k$ et $y = -228 - 35k$ alors :

$$35x + 32y = 35(209 + 32k) + 32(-228 - 35k) = \dots \text{ (à faire)} = 19.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $70x + 64y = 38$ sont les couples $(209 + 32k, -228 - 35k)$, où k entier relatif.

Exercice n°27 : résoudre l'équation diophantienne $68x + 11y = 65$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 68 et 11 :

$$(1) \quad 68 = 11 \times 6 + 2$$

$$(2) \quad 11 = 2 \times 5 + 1$$

$$(3) \quad 2 = 1 \times 2 + 0$$

donc $\text{PGCD}(68, 11) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(2) \quad 1 = 11 \times 1 + 2 \times (-5)$$

$$(1) \quad 1 = 11 \times 1 + (68 - 11 \times 6) \times (-5)$$

$$1 = 68 \times (-5) + 11 \times 31$$

On a donc : $68 \times (-5) + 11 \times 31 = 1$

puis en multipliant par 65 : $68 \times (-325) + 11 \times 2015 = 65$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $68x + 11y = 65$:

$$68x + 11y = 65 \text{ et } 68 \times (-325) + 11 \times 2015 = 65$$

$$\text{donc, par soustraction : } 68(x + 325) + 11(y - 2015) = 0$$

$$\text{donc } 68(x + 325) = 11(2015 - y). \quad (*)$$

Or, 68 et 11 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $68 \mid 2015 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $2015 - y = 68k$

et alors, d'après (*): $x + 325 = 11k$.

• Réciproquement, si $x = -325 + 11k$ et $y = 2015 - 68k$ alors :

$$68x + 11y = 68(-325 + 11k) + 11(2015 - 68k) = \dots \text{ (à faire)} = 65.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $68x + 11y = 65$ sont les couples $(-325 + 11k, 2015 - 68k)$, où k entier relatif.

Exercice n°28 : résoudre l'équation diophantienne $76x + 39y = 61$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 76 et 39 :

$$(1) \quad 76 = 39 \times 1 + 37$$

$$(2) \quad 39 = 37 \times 1 + 2$$

$$(3) \quad 37 = 2 \times 18 + 1$$

$$(4) \quad 2 = 1 \times 2 + 0$$

donc $\text{PGCD}(76, 39) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(3) \quad 1 = 37 \times 1 + 2 \times (-18)$$

$$(2) \quad 1 = 37 \times 1 + (39 - 37 \times 1) \times (-18)$$

$$1 = 39 \times (-18) + 37 \times 19$$

$$(1) \quad 1 = 39 \times -18 + (76 - 39 \times 1) \times 19$$

$$1 = 76 \times 19 + 39 \times (-37)$$

On a donc : $76 \times 19 + 39 \times (-37) = 1$

puis en multipliant par 61 : $76 \times 1159 + 39 \times (-2257) = 61$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $76x + 39y = 61$:

$$76x + 39y = 61 \text{ et } 76 \times 1159 + 39 \times (-2257) = 61$$

donc, par soustraction : $76(x - 1159) + 39(y + 2257) = 0$

$$\text{donc } 76(x - 1159) = 39(-2257 - y). \quad (*)$$

Or, 76 et 39 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $76 \mid -2257 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-2257 - y = 76k$

et alors, d'après (*): $x - 1159 = 39k$.

• Réciproquement, si $x = 1159 + 39k$ et $y = -2257 - 76k$ alors :

$$76x + 39y = 76(1159 + 39k) + 39(-2257 - 76k) = \dots \text{ (à faire) } = 61.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $76x + 39y = 61$ sont les couples $(1159 + 39k, -2257 - 76k)$, où k entier relatif.

Exercice n°29 : résoudre l'équation diophantienne $93x + 42y = 99$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 93 et 42 :

$$(1) \quad 93 = 42 \times 2 + 9$$

$$(2) \quad 42 = 9 \times 4 + 6$$

$$(3) \quad 9 = 6 \times 1 + 3$$

$$(4) \quad 6 = 3 \times 2 + 0$$

donc $\text{PGCD}(93, 42) = 3$.

En divisant par $\text{PGCD}(93, 42)$: $93x + 42y = 99 \Leftrightarrow 31x + 14y = 33$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 31 et 14 :

$$(1) \quad 31 = 14 \times 2 + 3$$

$$(2) \quad 14 = 3 \times 4 + 2$$

$$(3) \quad 3 = 2 \times 1 + 1$$

$$(4) \quad 2 = 1 \times 2 + 0$$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(3) \quad 1 = 3 \times 1 + 2 \times (-1)$$

$$(2) \quad 1 = 3 \times 1 + (14 - 3 \times 4) \times (-1)$$

$$1 = 14 \times (-1) + 3 \times 5$$

$$(1) \quad 1 = 14 \times -1 + (31 - 14 \times 2) \times 5$$

$$1 = 31 \times 5 + 14 \times (-11)$$

On a donc : $31 \times 5 + 14 \times (-11) = 1$

puis en multipliant par 33 : $31 \times 165 + 14 \times (-363) = 33$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $31x + 14y = 33$:

$$31x + 14y = 33 \text{ et } 31 \times 165 + 14 \times (-363) = 33$$

$$\text{donc, par soustraction : } 31(x - 165) + 14(y + 363) = 0$$

$$\text{donc } 31(x - 165) = 14(-363 - y). \quad (*)$$

Or, 31 et 14 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $31 \mid -363 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-363 - y = 31k$

et alors, d'après (*): $x - 165 = 14k$.

• Réciproquement, si $x = 165 + 14k$ et $y = -363 - 31k$ alors :

$$31x + 14y = 31(165 + 14k) + 14(-363 - 31k) = \dots \text{ (à faire)} = 33.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $93x + 42y = 99$ sont les couples $(165 + 14k, -363 - 31k)$, où k entier relatif.

Exercice n°30 : résoudre l'équation diophantienne $15x + 10y = 32$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 15 et 10 :

$$(1) \quad 15 = 10 \times 1 + 5$$

$$(2) \quad 10 = 5 \times 2 + 0$$

donc $\text{PGCD}(15, 10) = 5$.

• $32 = 5 \times 6 + 2$ donc 5 ne divise pas 32

donc l'équation diophantienne $15x + 10y = 32$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°31 : résoudre l'équation diophantienne $49x + 87y = 77$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 87 et 49 :

$$\begin{aligned}(1) \quad & 87 = 49 \times 1 + 38 \\(2) \quad & 49 = 38 \times 1 + 11 \\(3) \quad & 38 = 11 \times 3 + 5 \\(4) \quad & 11 = 5 \times 2 + 1 \\(5) \quad & 5 = 1 \times 5 + 0\end{aligned}$$

donc $\text{PGCD}(49, 87) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}(4) \quad & 1 = 11 \times 1 + 5 \times (-2) \\(3) \quad & 1 = 11 \times 1 + (38 - 11 \times 3) \times (-2) \\& 1 = 38 \times (-2) + 11 \times 7 \\(2) \quad & 1 = 38 \times -2 + (49 - 38 \times 1) \times 7 \\& 1 = 49 \times 7 + 38 \times (-9) \\(1) \quad & 1 = 49 \times 7 + (87 - 49 \times 1) \times (-9) \\& 1 = 87 \times (-9) + 49 \times 16\end{aligned}$$

On a donc : $49 \times 16 + 87 \times (-9) = 1$

puis en multipliant par 77 : $49 \times 1232 + 87 \times (-693) = 77$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $49x + 87y = 77$:

$$49x + 87y = 77 \text{ et } 49 \times 1232 + 87 \times (-693) = 77$$

$$\text{donc, par soustraction : } 49(x - 1232) + 87(y + 693) = 0$$

$$\text{donc } 49(x - 1232) = 87(-693 - y). \quad (*)$$

Or, 49 et 87 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $49 \mid -693 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-693 - y = 49k$

et alors, d'après (*): $x - 1232 = 87k$.

• Réciproquement, si $x = 1232 + 87k$ et $y = -693 - 49k$ alors :

$$49x + 87y = 49(1232 + 87k) + 87(-693 - 49k) = \dots \text{ (à faire)} = 77.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $49x + 87y = 77$ sont les couples $(1232 + 87k, -693 - 49k)$, où k entier relatif.

Exercice n°32 : résoudre l'équation diophantienne $2x + 60y = 24$.

CORRECTION

- $60 = 2 \times 30$
donc $\text{PGCD}(2, 60) = 2$.

En divisant par 2 : $2x + 60y = 24 \Leftrightarrow x + 30y = 12$.

- Conclusion : les solutions de l'équation $2x + 60y = 24$ sont évidemment les couples $(-30k + 12, k)$, où k entier relatif.

Exercice n°33 : résoudre l'équation diophantienne $18x + 9y = 18$.

CORRECTION

- $18 = 9 \times 2$
donc $\text{PGCD}(18, 9) = 9$.

En divisant par 9 : $18x + 9y = 18 \Leftrightarrow 2x + y = 2$.

- Conclusion : les solutions de l'équation $18x + 9y = 18$ sont évidemment les couples $(k, -2k + 2)$, où k entier relatif.

Exercice n°34 : résoudre l'équation diophantienne $62x + 32y = 94$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 62 et 32 :

$$(1) \quad 62 = 32 \times 1 + 30$$

$$(2) \quad 32 = 30 \times 1 + 2$$

$$(3) \quad 30 = 2 \times 15 + 0$$

donc $\text{PGCD}(62, 32) = 2$.

En divisant par $\text{PGCD}(62, 32)$: $62x + 32y = 94 \Leftrightarrow 31x + 16y = 47$.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est $(1, 1)$.

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 31 et 16) et en multipliant par 47, on aurait trouvé la solution particulière $(-47, 94)$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $31x + 16y = 47$:

$$31x + 16y = 47 \text{ et } 31 \times 1 + 16 \times 1 = 47$$

$$\text{donc, par soustraction : } 31(x - 1) + 16(y - 1) = 0$$

$$\text{donc } 31(x - 1) = 16(1 - y). \quad (*)$$

Or, 31 et 16 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $31 \mid 1 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $1 - y = 31k$

et alors, d'après (*): $x - 1 = 16k$.

• Réciproquement, si $x = 1 + 16k$ et $y = 1 - 31k$ alors :

$$31x + 16y = 31(1 + 16k) + 16(1 - 31k) = \dots \text{ (à faire) } = 47.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $62x + 32y = 94$ sont les couples $(1 + 16k, 1 - 31k)$, où k entier relatif.

Exercice n°35 : résoudre l'équation diophantienne $31x + 83y = 83$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 83 et 31 :

$$(1) \quad 83 = 31 \times 2 + 21$$

$$(2) \quad 31 = 21 \times 1 + 10$$

$$(3) \quad 21 = 10 \times 2 + 1$$

$$(4) \quad 10 = 1 \times 10 + 0$$

donc $\text{PGCD}(31, 83) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est $(0, 1)$.

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 83 et 31) et en multipliant par 83, on aurait trouvé la solution particulière $(-664, 249)$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $31x + 83y = 83$:

$$31x + 83y = 83 \text{ et } 83 \times 1 = 83$$

$$\text{donc, par soustraction : } 31x + 83(y - 1) = 0$$

$$\text{donc } 31x = 83(1 - y). \quad (*)$$

Or, 31 et 83 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $31 \mid 1 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $1 - y = 31k$

et alors, d'après (*): $x = 83k$.

• Réciproquement, si $x = 83k$ et $y = 1 - 31k$ alors :

$$31x + 83y = 31(-83k) + 83(1 - 31k) = \dots \text{ (à faire) } = 83.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $31x + 83y = 83$ sont les couples $(83k, 1 - 31k)$, où k entier relatif.

Exercice n°36 : résoudre l'équation diophantienne $6x + 79y = 7$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 79 et 6 :

$$(1) \quad 79 = 6 \times 13 + 1$$

$$(2) \quad 6 = 1 \times 6 + 0$$

donc $\text{PGCD}(6, 79) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(1) \quad 1 = 79 \times 1 + 6 \times (-13)$$

On a donc : $6 \times (-13) + 79 \times 1 = 1$

puis en multipliant par 7 : $6 \times (-91) + 79 \times 7 = 7$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $6x + 79y = 7$:

$$6x + 79y = 7 \text{ et } 6 \times (-91) + 79 \times 7 = 7$$

$$\text{donc, par soustraction : } 6(x + 91) + 79(y - 7) = 0$$

$$\text{donc } 6(x + 91) = 79(7 - y). \quad (*)$$

Or, 6 et 79 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $6 \mid 7 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $7 - y = 6k$

et alors, d'après (*): $x + 91 = 79k$.

• Réciproquement, si $x = -91 + 79k$ et $y = 7 - 6k$ alors :

$$6x + 79y = 6(-91 + 79k) + 79(7 - 6k) = \dots \text{ (à faire) } = 7.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $6x + 79y = 7$ sont les couples $(-91 + 79k, 7 - 6k)$, où k entier relatif.

Exercice n°37 : résoudre l'équation diophantienne $89x + 3y = 10$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 89 et 3 :

$$(1) \quad 89 = 3 \times 29 + 2$$

$$(2) \quad 3 = 2 \times 1 + 1$$

$$(3) \quad 2 = 1 \times 2 + 0$$

donc $\text{PGCD}(89, 3) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(2) \quad 1 = 3 \times 1 + 2 \times (-1)$$

$$(1) \quad 1 = 3 \times 1 + (89 - 3 \times 29) \times (-1)$$

$$1 = 89 \times (-1) + 3 \times 30$$

On a donc : $89 \times (-1) + 3 \times 30 = 1$

puis en multipliant par 10 : $89 \times (-10) + 3 \times 300 = 10$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $89x + 3y = 10$:

$$89x + 3y = 10 \text{ et } 89 \times (-10) + 3 \times 300 = 10$$

$$\text{donc, par soustraction : } 89(x + 10) + 3(y - 300) = 0$$

$$\text{donc } 89(x + 10) = 3(300 - y). \quad (*)$$

Or, 89 et 3 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $89 \mid 300 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $300 - y = 89k$

et alors, d'après (*): $x + 10 = 3k$.

• Réciproquement, si $x = -10 + 3k$ et $y = 300 - 89k$ alors :

$$89x + 3y = 89(-10 + 3k) + 3(300 - 89k) = \dots \text{ (à faire) } = 10.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $89x + 3y = 10$ sont les couples $(-10 + 3k, 300 - 89k)$, où k entier relatif.

Exercice n°38 : résoudre l'équation diophantienne $57x + 100y = 33$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 100 et 57 :

$$(1) \quad 100 = 57 \times 1 + 43$$

$$(2) \quad 57 = 43 \times 1 + 14$$

$$(3) \quad 43 = 14 \times 3 + 1$$

$$(4) \quad 14 = 1 \times 14 + 0$$

donc $\text{PGCD}(57, 100) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(3) \quad 1 = 43 \times 1 + 14 \times (-3)$$

$$(2) \quad 1 = 43 \times 1 + (57 - 43 \times 1) \times (-3)$$

$$1 = 57 \times (-3) + 43 \times 4$$

$$(1) \quad 1 = 57 \times (-3) + (100 - 57 \times 1) \times 4$$

$$1 = 100 \times 4 + 57 \times (-7)$$

On a donc : $57 \times (-7) + 100 \times 4 = 1$

puis en multipliant par 33 : $57 \times (-231) + 100 \times 132 = 33$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $57x + 100y = 33$:

$$57x + 100y = 33 \text{ et } 57 \times (-231) + 100 \times 132 = 33$$

donc, par soustraction : $57(x + 231) + 100(y - 132) = 0$

$$\text{donc } 57(x + 231) = 100(132 - y). \quad (*)$$

Or, 57 et 100 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $57 \mid 132 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $132 - y = 57k$

et alors, d'après (*): $x + 231 = 100k$.

• Réciproquement, si $x = -231 + 100k$ et $y = 132 - 57k$ alors :

$$57x + 100y = 57(-231 + 100k) + 100(132 - 57k) = \dots \text{ (à faire) } = 33.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $57x + 100y = 33$ sont les couples $(-231 + 100k, 132 - 57k)$, où k entier relatif.

Exercice n°39 : résoudre l'équation diophantienne $86x + y = 19$.

CORRECTION

- Conclusion : les solutions de l'équation $86x + y = 19$ sont évidemment les couples $(k, -86k + 19)$, où k entier relatif.

Exercice n°40 : résoudre l'équation diophantienne $82x + 80y = 32$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 82 et 80 :

$$(1) \quad 82 = 80 \times 1 + 2$$

$$(2) \quad 80 = 2 \times 40 + 0$$

donc $\text{PGCD}(82, 80) = 2$.

En divisant par $\text{PGCD}(82, 80)$: $82x + 80y = 32 \Leftrightarrow 41x + 40y = 16$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 41 et 40 :

$$(1) \quad 41 = 40 \times 1 + 1$$

$$(2) \quad 40 = 1 \times 40 + 0$$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(1) \quad 1 = 41 \times 1 + 40 \times (-1)$$

Puis en multipliant par 16 : $41 \times 16 + 40 \times (-16) = 16$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $41x + 40y = 16$:

$$41x + 40y = 16 \text{ et } 41 \times 16 + 40 \times (-16) = 16$$

$$\text{donc, par soustraction : } 41(x - 16) + 40(y + 16) = 0$$

$$\text{donc } 41(x - 16) = 40(-16 - y). \quad (*)$$

Or, 41 et 40 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $41 \mid -16 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-16 - y = 41k$

et alors, d'après (*): $x - 16 = 40k$.

• Réciproquement, si $x = 16 + 40k$ et $y = -16 - 41k$ alors :

$$41x + 40y = 41(16 + 40k) + 40(-16 - 41k) = \dots \text{ (à faire) } = 16.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $82x + 80y = 32$ sont les couples $(16 + 40k, -16 - 41k)$, où k entier relatif.

Exercice n°41 : résoudre l'équation diophantienne $93x + 32y = 39$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 93 et 32 :

$$\begin{aligned}(1) \quad & 93 = 32 \times 2 + 29 \\(2) \quad & 32 = 29 \times 1 + 3 \\(3) \quad & 29 = 3 \times 9 + 2 \\(4) \quad & 3 = 2 \times 1 + 1 \\(5) \quad & 2 = 1 \times 2 + 0\end{aligned}$$

donc $\text{PGCD}(93, 32) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}(4) \quad & 1 = 3 \times 1 + 2 \times (-1) \\(3) \quad & 1 = 3 \times 1 + (29 - 3 \times 9) \times (-1) \\& 1 = 29 \times (-1) + 3 \times 10 \\(2) \quad & 1 = 29 \times -1 + (32 - 29 \times 1) \times 10 \\& 1 = 32 \times 10 + 29 \times (-11) \\(1) \quad & 1 = 32 \times 10 + (93 - 32 \times 2) \times (-11) \\& 1 = 93 \times (-11) + 32 \times 32\end{aligned}$$

On a donc : $93 \times (-11) + 32 \times 32 = 1$

puis en multipliant par 39 : $93 \times (-429) + 32 \times 1248 = 39$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $93x + 32y = 39$:

$$93x + 32y = 39 \text{ et } 93 \times (-429) + 32 \times 1248 = 39$$

$$\text{donc, par soustraction : } 93(x + 429) + 32(y - 1248) = 0$$

$$\text{donc } 93(x + 429) = 32(1248 - y). \quad (*)$$

Or, 93 et 32 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $93 \mid 1248 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $1248 - y = 93k$

et alors, d'après (*): $x + 429 = 32k$.

• Réciproquement, si $x = -429 + 32k$ et $y = 1248 - 93k$ alors :

$$93x + 32y = 93(-429 + 32k) + 32(1248 - 93k) = \dots \text{ (à faire) } = 39.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $93x + 32y = 39$ sont les couples $(-429 + 32k, 1248 - 93k)$, où k entier relatif.

Exercice n°42 : résoudre l'équation diophantienne $2x + 84y = 18$.

CORRECTION

- $84 = 2 \times 42$
donc $\text{PGCD}(2, 84) = 2$.

En divisant par 2 : $2x + 84y = 18 \Leftrightarrow x + 42y = 9$.

- Conclusion : les solutions de l'équation $2x + 84y = 18$ sont évidemment les couples $(-42k + 9, k)$, où k entier relatif.

Exercice n°43 : résoudre l'équation diophantienne $98x + 18y = 66$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 98 et 18 :

$$(1) \quad 98 = 18 \times 5 + 8$$

$$(2) \quad 18 = 8 \times 2 + 2$$

$$(3) \quad 8 = 2 \times 4 + 0$$

donc $\text{PGCD}(98, 18) = 2$.

En divisant par $\text{PGCD}(98, 18)$: $98x + 18y = 66 \Leftrightarrow 49x + 9y = 33$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 49 et 9 :

$$(1) \quad 49 = 9 \times 5 + 4$$

$$(2) \quad 9 = 4 \times 2 + 1$$

$$(3) \quad 4 = 1 \times 4 + 0$$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(2) \quad 1 = 9 \times 1 + 4 \times (-2)$$

$$(1) \quad 1 = 9 \times 1 + (49 - 9 \times 5) \times (-2)$$

$$1 = 49 \times (-2) + 9 \times 11$$

On a donc : $49 \times (-2) + 9 \times 11 = 1$

puis en multipliant par 33 : $49 \times (-66) + 9 \times 363 = 33$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $49x + 9y = 33$:

$$49x + 9y = 33 \text{ et } 49 \times (-66) + 9 \times 363 = 33$$

$$\text{donc, par soustraction : } 49(x + 66) + 9(y - 363) = 0$$

$$\text{donc } 49(x + 66) = 9(363 - y). \quad (*)$$

Or, 49 et 9 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $49 \mid 363 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $363 - y = 49k$

et alors, d'après (*): $x + 66 = 9k$.

• Réciproquement, si $x = -66 + 9k$ et $y = 363 - 49k$ alors :

$$49x + 9y = 49(-66 + 9k) + 9(363 - 49k) = \dots \text{ (à faire) } = 33.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $98x + 18y = 66$ sont les couples $(-66 + 9k, 363 - 49k)$, où k entier relatif.

Exercice n°44 : résoudre l'équation diophantienne $51x + 24y = 42$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 51 et 24 :

$$(1) \quad 51 = 24 \times 2 + 3$$

$$(2) \quad 24 = 3 \times 8 + 0$$

donc $\text{PGCD}(51, 24) = 3$.

En divisant par $\text{PGCD}(51, 24)$: $51x + 24y = 42 \Leftrightarrow 17x + 8y = 14$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 17 et 8 :

$$(1) \quad 17 = 8 \times 2 + 1$$

$$(2) \quad 8 = 1 \times 8 + 0$$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(1) \quad 1 = 17 \times 1 + 8 \times (-2)$$

Puis en multipliant par 14 : $17 \times 14 + 8 \times (-28) = 14$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $17x + 8y = 14$:

$$17x + 8y = 14 \text{ et } 17 \times 14 + 8 \times (-28) = 14$$

donc, par soustraction : $17(x - 14) + 8(y + 28) = 0$

$$\text{donc } 17(x - 14) = 8(-28 - y). \quad (*)$$

Or, 17 et 8 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $17 \mid -28 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-28 - y = 17k$

et alors, d'après (*): $x - 14 = 8k$.

• Réciproquement, si $x = 14 + 8k$ et $y = -28 - 17k$ alors :

$$17x + 8y = 17(14 + 8k) + 8(-28 - 17k) = \dots \text{ (à faire) } = 14.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $51x + 24y = 42$ sont les couples $(14 + 8k, -28 - 17k)$, où k entier relatif.

Exercice n°45 : résoudre l'équation diophantienne $3x + 96y = 24$.

CORRECTION

- $96 = 3 \times 32$
donc $\text{PGCD}(3, 96) = 3$.

En divisant par 3 : $3x + 96y = 24 \Leftrightarrow x + 32y = 8$.

- Conclusion : les solutions de l'équation $3x + 96y = 24$ sont évidemment les couples $(-32k + 8, k)$, où k entier relatif.

Exercice n°46 : résoudre l'équation diophantienne $47x + 20y = 8$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 47 et 20 :

$$(1) \quad 47 = 20 \times 2 + 7$$

$$(2) \quad 20 = 7 \times 2 + 6$$

$$(3) \quad 7 = 6 \times 1 + 1$$

$$(4) \quad 6 = 1 \times 6 + 0$$

donc $\text{PGCD}(47, 20) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(3) \quad 1 = 7 \times 1 + 6 \times (-1)$$

$$(2) \quad 1 = 7 \times 1 + (20 - 7 \times 2) \times (-1)$$

$$1 = 20 \times (-1) + 7 \times 3$$

$$(1) \quad 1 = 20 \times -1 + (47 - 20 \times 2) \times 3$$

$$1 = 47 \times 3 + 20 \times (-7)$$

On a donc : $47 \times 3 + 20 \times (-7) = 1$

puis en multipliant par 8 : $47 \times 24 + 20 \times (-56) = 8$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $47x + 20y = 8$:

$$47x + 20y = 8 \text{ et } 47 \times 24 + 20 \times (-56) = 8$$

donc, par soustraction : $47(x - 24) + 20(y + 56) = 0$

$$\text{donc } 47(x - 24) = 20(-56 - y). \quad (*)$$

Or, 47 et 20 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $47 \mid -56 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-56 - y = 47k$

et alors, d'après (*): $x - 24 = 20k$.

• Réciproquement, si $x = 24 + 20k$ et $y = -56 - 47k$ alors :

$$47x + 20y = 47(24 + 20k) + 20(-56 - 47k) = \dots \text{ (à faire) } = 8.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $47x + 20y = 8$ sont les couples $(24 + 20k, -56 - 47k)$, où k entier relatif.

Exercice n°47 : résoudre l'équation diophantienne $11x + 4y = 9$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 11 et 4 :

$$(1) \quad 11 = 4 \times 2 + 3$$

$$(2) \quad 4 = 3 \times 1 + 1$$

$$(3) \quad 3 = 1 \times 3 + 0$$

donc $\text{PGCD}(11, 4) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(2) \quad 1 = 4 \times 1 + 3 \times (-1)$$

$$(1) \quad 1 = 4 \times 1 + (11 - 4 \times 2) \times (-1)$$

$$1 = 11 \times (-1) + 4 \times 3$$

On a donc : $11 \times (-1) + 4 \times 3 = 1$

puis en multipliant par 9 : $11 \times (-9) + 4 \times 27 = 9$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $11x + 4y = 9$:

$$11x + 4y = 9 \text{ et } 11 \times (-9) + 4 \times 27 = 9$$

$$\text{donc, par soustraction : } 11(x + 9) + 4(y - 27) = 0$$

$$\text{donc } 11(x + 9) = 4(27 - y). \quad (*)$$

Or, 11 et 4 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $11 \mid 27 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $27 - y = 11k$

et alors, d'après (*): $x + 9 = 4k$.

• Réciproquement, si $x = -9 + 4k$ et $y = 27 - 11k$ alors :

$$11x + 4y = 11(-9 + 4k) + 4(27 - 11k) = \dots \text{ (à faire)} = 9.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $11x + 4y = 9$ sont les couples $(-9 + 4k, 27 - 11k)$, où k entier relatif.

Exercice n°48 : résoudre l'équation diophantienne $22x + 91y = 16$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 91 et 22 :

$$(1) \quad 91 = 22 \times 4 + 3$$

$$(2) \quad 22 = 3 \times 7 + 1$$

$$(3) \quad 3 = 1 \times 3 + 0$$

donc $\text{PGCD}(22, 91) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(2) \quad 1 = 22 \times 1 + 3 \times (-7)$$

$$(1) \quad 1 = 22 \times 1 + (91 - 22 \times 4) \times (-7)$$

$$1 = 91 \times (-7) + 22 \times 29$$

On a donc : $22 \times 29 + 91 \times (-7) = 1$

puis en multipliant par 16 : $22 \times 464 + 91 \times (-112) = 16$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $22x + 91y = 16$:

$$22x + 91y = 16 \text{ et } 22 \times 464 + 91 \times (-112) = 16$$

$$\text{donc, par soustraction : } 22(x - 464) + 91(y + 112) = 0$$

$$\text{donc } 22(x - 464) = 91(-112 - y). \quad (*)$$

Or, 22 et 91 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $22 \mid -112 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-112 - y = 22k$

et alors, d'après (*): $x - 464 = 91k$.

• Réciproquement, si $x = 464 + 91k$ et $y = -112 - 22k$ alors :

$$22x + 91y = 22(464 + 91k) + 91(-112 - 22k) = \dots \text{ (à faire)} = 16.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $22x + 91y = 16$ sont les couples $(464 + 91k, -112 - 22k)$, où k entier relatif.

Exercice n°49 : résoudre l'équation diophantienne $74x + 90y = 66$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 90 et 74 :

$$\begin{aligned}(1) \quad & 90 = 74 \times 1 + 16 \\(2) \quad & 74 = 16 \times 4 + 10 \\(3) \quad & 16 = 10 \times 1 + 6 \\(4) \quad & 10 = 6 \times 1 + 4 \\(5) \quad & 6 = 4 \times 1 + 2 \\(6) \quad & 4 = 2 \times 2 + 0\end{aligned}$$

donc $\text{PGCD}(74, 90) = 2$.

En divisant par $\text{PGCD}(74, 90)$: $74x + 90y = 66 \Leftrightarrow 37x + 45y = 33$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 37 et 45 :

$$\begin{aligned}(1) \quad & 45 = 37 \times 1 + 8 \\(2) \quad & 37 = 8 \times 4 + 5 \\(3) \quad & 8 = 5 \times 1 + 3 \\(4) \quad & 5 = 3 \times 1 + 2 \\(5) \quad & 3 = 2 \times 1 + 1 \\(6) \quad & 2 = 1 \times 2 + 0\end{aligned}$$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}(5) \quad & 1 = 3 \times 1 + 2 \times (-1) \\(4) \quad & 1 = 3 \times 1 + (5-3 \times 1) \times (-1) \\& 1 = 5 \times (-1) + 3 \times 2 \\(3) \quad & 1 = 5 \times (-1) + (8-5 \times 1) \times 2 \\& 1 = 8 \times 2 + 5 \times (-3) \\(2) \quad & 1 = 8 \times 2 + (37-8 \times 4) \times (-3) \\& 1 = 37 \times (-3) + 8 \times 14 \\(1) \quad & 1 = 37 \times (-3) + (45-37 \times 1) \times 14 \\& 1 = 45 \times 14 + 37 \times (-17)\end{aligned}$$

On a donc : $37 \times (-17) + 45 \times 14 = 1$

puis en multipliant par 33 : $37 \times (-561) + 45 \times 462 = 33$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $37x + 45y = 33$:

$37x + 45y = 33$ et $37 \times (-561) + 45 \times 462 = 33$

donc, par soustraction : $37(x + 561) + 45(y - 462) = 0$

donc $37(x + 561) = 45(462 - y)$. (*)

Or, 37 et 45 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $37 \mid 462 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $462 - y = 37k$

et alors, d'après (*): $x + 561 = 45k$.

• Réciproquement, si $x = -561 + 45k$ et $y = 462 - 37k$ alors :

$37x + 45y = 37(-561 + 45k) + 45(462 - 37k) = \dots$ (à faire) $= 33$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $74x + 90y = 66$ sont les couples $(-561 + 45k, 462 - 37k)$, où k entier relatif.

Exercice n°50 : résoudre l'équation diophantienne $14x + 63y = 63$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 63 et 14 :

$$(1) \quad 63 = 14 \times 4 + 7$$

$$(2) \quad 14 = 7 \times 2 + 0$$

donc $\text{PGCD}(14, 63) = 7$.

En divisant par $\text{PGCD}(14, 63)$: $14x + 63y = 63 \Leftrightarrow 2x + 9y = 9$.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est $(0, 1)$.

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 9 et 2) et en multipliant par 9, on aurait trouvé la solution particulière $(-36, 9)$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $2x + 9y = 9$:

$$2x + 9y = 9 \text{ et } 9 \times 1 = 9$$

$$\text{donc, par soustraction : } 2x + 9(y - 1) = 0$$

$$\text{donc } 2x = 9(1 - y). \quad (*)$$

Or, 2 et 9 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $2 \mid 1 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $1 - y = 2k$

et alors, d'après (*): $x = 9k$.

• Réciproquement, si $x = 9k$ et $y = 1 - 2k$ alors :

$$2x + 9y = 2(-9k) + 9(1 - 2k) = \dots \text{ (à faire) } = 9.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $14x + 63y = 63$ sont les couples $(9k, 1 - 2k)$, où k entier relatif.

Exercice n°51 : résoudre l'équation diophantienne $93x + 87y = 41$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 93 et 87 :

$$(1) \quad 93 = 87 \times 1 + 6$$

$$(2) \quad 87 = 6 \times 14 + 3$$

$$(3) \quad 6 = 3 \times 2 + 0$$

donc $\text{PGCD}(93, 87) = 3$.

• $41 = 3 \times 13 + 2$ donc 3 ne divise pas 41

donc l'équation diophantienne $93x + 87y = 41$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°52 : résoudre l'équation diophantienne $12x + 67y = 77$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 67 et 12 :

$$\begin{aligned}(1) \quad & 67 = 12 \times 5 + 7 \\(2) \quad & 12 = 7 \times 1 + 5 \\(3) \quad & 7 = 5 \times 1 + 2 \\(4) \quad & 5 = 2 \times 2 + 1 \\(5) \quad & 2 = 1 \times 2 + 0\end{aligned}$$

donc $\text{PGCD}(12, 67) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}(4) \quad & 1 = 5 \times 1 + 2 \times (-2) \\(3) \quad & 1 = 5 \times 1 + (7-5 \times 1) \times (-2) \\& 1 = 7 \times (-2) + 5 \times 3 \\(2) \quad & 1 = 7 \times -2 + (12-7 \times 1) \times 3 \\& 1 = 12 \times 3 + 7 \times (-5) \\(1) \quad & 1 = 12 \times 3 + (67-12 \times 5) \times (-5) \\& 1 = 67 \times (-5) + 12 \times 28\end{aligned}$$

On a donc : $12 \times 28 + 67 \times (-5) = 1$

puis en multipliant par 77 : $12 \times 2156 + 67 \times (-385) = 77$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $12x + 67y = 77$:

$$12x + 67y = 77 \text{ et } 12 \times 2156 + 67 \times (-385) = 77$$

$$\text{donc, par soustraction : } 12(x - 2156) + 67(y + 385) = 0$$

$$\text{donc } 12(x - 2156) = 67(-385 - y). \quad (*)$$

Or, 12 et 67 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $12 \mid -385 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-385 - y = 12k$

et alors, d'après (*): $x - 2156 = 67k$.

• Réciproquement, si $x = 2156 + 67k$ et $y = -385 - 12k$ alors :

$$12x + 67y = 12(2156 + 67k) + 67(-385 - 12k) = \dots \text{ (à faire)} = 77.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $12x + 67y = 77$ sont les couples $(2156 + 67k, -385 - 12k)$, où k entier relatif.

Exercice n°53 : résoudre l'équation diophantienne $88x + 91y = 89$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 91 et 88 :

$$(1) \quad 91 = 88 \times 1 + 3$$

$$(2) \quad 88 = 3 \times 29 + 1$$

$$(3) \quad 3 = 1 \times 3 + 0$$

donc $\text{PGCD}(88, 91) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(2) \quad 1 = 88 \times 1 + 3 \times (-29)$$

$$(1) \quad 1 = 88 \times 1 + (91 - 88 \times 1) \times (-29)$$

$$1 = 91 \times (-29) + 88 \times 30$$

On a donc : $88 \times 30 + 91 \times (-29) = 1$

puis en multipliant par 89 : $88 \times 2670 + 91 \times (-2581) = 89$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $88x + 91y = 89$:

$$88x + 91y = 89 \text{ et } 88 \times 2670 + 91 \times (-2581) = 89$$

$$\text{donc, par soustraction : } 88(x - 2670) + 91(y + 2581) = 0$$

$$\text{donc } 88(x - 2670) = 91(-2581 - y). \quad (*)$$

Or, 88 et 91 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $88 \mid -2581 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-2581 - y = 88k$

et alors, d'après (*): $x - 2670 = 91k$.

• Réciproquement, si $x = 2670 + 91k$ et $y = -2581 - 88k$ alors :

$$88x + 91y = 88(2670 + 91k) + 91(-2581 - 88k) = \dots \text{ (à faire)} = 89.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $88x + 91y = 89$ sont les couples $(2670 + 91k, -2581 - 88k)$, où k entier relatif.

Exercice n°54 : résoudre l'équation diophantienne $67x + 50y = 67$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 67 et 50 :

$$(1) \quad 67 = 50 \times 1 + 17$$

$$(2) \quad 50 = 17 \times 2 + 16$$

$$(3) \quad 17 = 16 \times 1 + 1$$

$$(4) \quad 16 = 1 \times 16 + 0$$

donc $\text{PGCD}(67, 50) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est $(1, 0)$.

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 67 et 50) et en multipliant par 67, on aurait trouvé la solution particulière $(201, -268)$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $67x + 50y = 67$:

$$67x + 50y = 67 \text{ et } 67 \times 1 + 50 \times 0 = 67$$

$$\text{donc, par soustraction : } 67(x - 1) + 50y = 0$$

$$\text{donc } 67(x - 1) = -50y. \quad (*)$$

Or, 67 et 50 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $67 \mid -y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-y = 67k$

et alors, d'après (*): $x - 1 = 50k$.

• Réciproquement, si $x = 1 + 50k$ et $y = -67k$ alors :

$$67x + 50y = 67(1 + 50k) + 50(-67k) = \dots \text{ (à faire) } = 67.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $67x + 50y = 67$ sont les couples $(1 + 50k, -67k)$, où k entier relatif.

Exercice n°55 : résoudre l'équation diophantienne $80x + 95y = 61$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 95 et 80 :

$$(1) \quad 95 = 80 \times 1 + 15$$

$$(2) \quad 80 = 15 \times 5 + 5$$

$$(3) \quad 15 = 5 \times 3 + 0$$

donc $\text{PGCD}(80, 95) = 5$.

• $61 = 5 \times 12 + 1$ donc 5 ne divise pas 61

donc l'équation diophantienne $80x + 95y = 61$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°56 : résoudre l'équation diophantienne $100x + 18y = 64$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 100 et 18 :

$$(1) \quad 100 = 18 \times 5 + 10$$

$$(2) \quad 18 = 10 \times 1 + 8$$

$$(3) \quad 10 = 8 \times 1 + 2$$

$$(4) \quad 8 = 2 \times 4 + 0$$

donc $\text{PGCD}(100, 18) = 2$.

En divisant par $\text{PGCD}(100, 18)$: $100x + 18y = 64 \Leftrightarrow 50x + 9y = 32$.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est $(1, -2)$.

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 50 et 9) et en multipliant par 32, on aurait trouvé la solution particulière $(64, -352)$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $50x + 9y = 32$:

$$50x + 9y = 32 \text{ et } 50 \times 1 + 9 \times (-2) = 32$$

$$\text{donc, par soustraction : } 50(x - 1) + 9(y + 2) = 0$$

$$\text{donc } 50(x - 1) = 9(-2 - y). \quad (*)$$

Or, 50 et 9 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $50 \mid -2 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-2 - y = 50k$

et alors, d'après (*): $x - 1 = 9k$.

• Réciproquement, si $x = 1 + 9k$ et $y = -2 - 50k$ alors :

$$50x + 9y = 50(1 + 9k) + 9(-2 - 50k) = \dots \text{ (à faire) } = 32.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $100x + 18y = 64$ sont les couples $(1 + 9k, -2 - 50k)$, où k entier relatif.

Exercice n°57 : résoudre l'équation diophantienne $90x + 51y = 2$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 90 et 51 :

$$(1) \quad 90 = 51 \times 1 + 39$$

$$(2) \quad 51 = 39 \times 1 + 12$$

$$(3) \quad 39 = 12 \times 3 + 3$$

$$(4) \quad 12 = 3 \times 4 + 0$$

donc $\text{PGCD}(90, 51) = 3$.

• 3 ne divise pas 2

donc l'équation diophantienne $90x + 51y = 2$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°58 : résoudre l'équation diophantienne $69x + 74y = 11$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 74 et 69 :

$$(1) \quad 74 = 69 \times 1 + 5$$

$$(2) \quad 69 = 5 \times 13 + 4$$

$$(3) \quad 5 = 4 \times 1 + 1$$

$$(4) \quad 4 = 1 \times 4 + 0$$

donc $\text{PGCD}(69, 74) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(3) \quad 1 = 5 \times 1 + 4 \times (-1)$$

$$(2) \quad 1 = 5 \times 1 + (69 - 5 \times 13) \times (-1)$$

$$1 = 69 \times (-1) + 5 \times 14$$

$$(1) \quad 1 = 69 \times (-1) + (74 - 69 \times 1) \times 14$$

$$1 = 74 \times 14 + 69 \times (-15)$$

On a donc : $69 \times (-15) + 74 \times 14 = 1$

puis en multipliant par 11 : $69 \times (-165) + 74 \times 154 = 11$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $69x + 74y = 11$:

$$69x + 74y = 11 \text{ et } 69 \times (-165) + 74 \times 154 = 11$$

$$\text{donc, par soustraction : } 69(x + 165) + 74(y - 154) = 0$$

$$\text{donc } 69(x + 165) = 74(154 - y). \quad (*)$$

Or, 69 et 74 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $69 \mid 154 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $154 - y = 69k$

et alors, d'après (*): $x + 165 = 74k$.

• Réciproquement, si $x = -165 + 74k$ et $y = 154 - 69k$ alors :

$$69x + 74y = 69(-165 + 74k) + 74(154 - 69k) = \dots \text{ (à faire) } = 11.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $69x + 74y = 11$ sont les couples $(-165 + 74k, 154 - 69k)$, où k entier relatif.

Exercice n°59 : résoudre l'équation diophantienne $98x + 62y = 96$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 98 et 62 :

$$\begin{aligned}(1) \quad & 98 = 62 \times 1 + 36 \\(2) \quad & 62 = 36 \times 1 + 26 \\(3) \quad & 36 = 26 \times 1 + 10 \\(4) \quad & 26 = 10 \times 2 + 6 \\(5) \quad & 10 = 6 \times 1 + 4 \\(6) \quad & 6 = 4 \times 1 + 2 \\(7) \quad & 4 = 2 \times 2 + 0\end{aligned}$$

donc $\text{PGCD}(98, 62) = 2$.

En divisant par $\text{PGCD}(98, 62)$: $98x + 62y = 96 \Leftrightarrow 49x + 31y = 48$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 49 et 31 :

$$\begin{aligned}(1) \quad & 49 = 31 \times 1 + 18 \\(2) \quad & 31 = 18 \times 1 + 13 \\(3) \quad & 18 = 13 \times 1 + 5 \\(4) \quad & 13 = 5 \times 2 + 3 \\(5) \quad & 5 = 3 \times 1 + 2 \\(6) \quad & 3 = 2 \times 1 + 1 \\(7) \quad & 2 = 1 \times 2 + 0\end{aligned}$$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}(6) \quad & 1 = 3 \times 1 + 2 \times (-1) \\(5) \quad & 1 = 3 \times 1 + (5-3 \times 1) \times (-1) \\& 1 = 5 \times (-1) + 3 \times 2 \\(4) \quad & 1 = 5 \times -1 + (13-5 \times 2) \times 2 \\& 1 = 13 \times 2 + 5 \times (-5) \\(3) \quad & 1 = 13 \times 2 + (18-13 \times 1) \times (-5) \\& 1 = 18 \times (-5) + 13 \times 7 \\(2) \quad & 1 = 18 \times -5 + (31-18 \times 1) \times 7 \\& 1 = 31 \times 7 + 18 \times (-12) \\(1) \quad & 1 = 31 \times 7 + (49-31 \times 1) \times (-12) \\& 1 = 49 \times (-12) + 31 \times 19\end{aligned}$$

On a donc : $49 \times (-12) + 31 \times 19 = 1$

puis en multipliant par 48 : $49 \times (-576) + 31 \times 912 = 48$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $49x + 31y = 48$:

$49x + 31y = 48$ et $49 \times (-576) + 31 \times 912 = 48$

donc, par soustraction : $49(x + 576) + 31(y - 912) = 0$

donc $49(x + 576) = 31(912 - y)$. (*)

Or, 49 et 31 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $49 \mid 912 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $912 - y = 49k$

et alors, d'après (*): $x + 576 = 31k$.

• Réciproquement, si $x = -576 + 31k$ et $y = 912 - 49k$ alors :

$49x + 31y = 49(-576 + 31k) + 31(912 - 49k) = \dots$ (à faire) $= 48$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $98x + 62y = 96$ sont les couples $(-576 + 31k, 912 - 49k)$, où k entier relatif.

Exercice n°60 : résoudre l'équation diophantienne $50x + 78y = 26$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 78 et 50 :

$$\begin{array}{l} (1) \quad 78 = 50 \times 1 + 28 \\ (2) \quad 50 = 28 \times 1 + 22 \\ (3) \quad 28 = 22 \times 1 + 6 \\ (4) \quad 22 = 6 \times 3 + 4 \\ (5) \quad 6 = 4 \times 1 + 2 \\ (6) \quad 4 = 2 \times 2 + 0 \end{array}$$

donc $\text{PGCD}(50, 78) = 2$.

En divisant par $\text{PGCD}(50, 78)$: $50x + 78y = 26 \Leftrightarrow 25x + 39y = 13$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 25 et 39 :

$$\begin{array}{l} (1) \quad 39 = 25 \times 1 + 14 \\ (2) \quad 25 = 14 \times 1 + 11 \\ (3) \quad 14 = 11 \times 1 + 3 \\ (4) \quad 11 = 3 \times 3 + 2 \\ (5) \quad 3 = 2 \times 1 + 1 \\ (6) \quad 2 = 1 \times 2 + 0 \end{array}$$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{array}{l} (5) \quad 1 = 3 \times 1 + 2 \times (-1) \\ (4) \quad 1 = 3 \times 1 + (11-3 \times 3) \times (-1) \\ \quad 1 = 11 \times (-1) + 3 \times 4 \\ (3) \quad 1 = 11 \times (-1) + (14-11 \times 1) \times 4 \\ \quad 1 = 14 \times 4 + 11 \times (-5) \\ (2) \quad 1 = 14 \times 4 + (25-14 \times 1) \times (-5) \\ \quad 1 = 25 \times (-5) + 14 \times 9 \\ (1) \quad 1 = 25 \times (-5) + (39-25 \times 1) \times 9 \\ \quad 1 = 39 \times 9 + 25 \times (-14) \end{array}$$

On a donc : $25 \times (-14) + 39 \times 9 = 1$

puis en multipliant par 13 : $25 \times (-182) + 39 \times 117 = 13$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $25x + 39y = 13$:

$25x + 39y = 13$ et $25 \times (-182) + 39 \times 117 = 13$

donc, par soustraction : $25(x + 182) + 39(y - 117) = 0$

donc $25(x + 182) = 39(117 - y)$. (*)

Or, 25 et 39 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $25 \mid 117 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $117 - y = 25k$

et alors, d'après (*): $x + 182 = 39k$.

• Réciproquement, si $x = -182 + 39k$ et $y = 117 - 25k$ alors :

$25x + 39y = 25(-182 + 39k) + 39(117 - 25k) = \dots$ (à faire) $= 13$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $50x + 78y = 26$ sont les couples $(-182 + 39k, 117 - 25k)$, où k entier relatif.

Exercice n°61 : résoudre l'équation diophantienne $74x + 10y = 66$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 74 et 10 :

$$(1) \quad 74 = 10 \times 7 + 4$$

$$(2) \quad 10 = 4 \times 2 + 2$$

$$(3) \quad 4 = 2 \times 2 + 0$$

donc $\text{PGCD}(74, 10) = 2$.

En divisant par $\text{PGCD}(74, 10)$: $74x + 10y = 66 \Leftrightarrow 37x + 5y = 33$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 37 et 5 :

$$(1) \quad 37 = 5 \times 7 + 2$$

$$(2) \quad 5 = 2 \times 2 + 1$$

$$(3) \quad 2 = 1 \times 2 + 0$$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(2) \quad 1 = 5 \times 1 + 2 \times (-2)$$

$$(1) \quad 1 = 5 \times 1 + (37-5 \times 7) \times (-2)$$

$$1 = 37 \times (-2) + 5 \times 15$$

On a donc : $37 \times (-2) + 5 \times 15 = 1$

puis en multipliant par 33 : $37 \times (-66) + 5 \times 495 = 33$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $37x + 5y = 33$:

$$37x + 5y = 33 \text{ et } 37 \times (-66) + 5 \times 495 = 33$$

$$\text{donc, par soustraction : } 37(x + 66) + 5(y - 495) = 0$$

$$\text{donc } 37(x + 66) = 5(495 - y). \quad (*)$$

Or, 37 et 5 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $37 \mid 495 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $495 - y = 37k$

et alors, d'après (*): $x + 66 = 5k$.

• Réciproquement, si $x = -66 + 5k$ et $y = 495 - 37k$ alors :

$$37x + 5y = 37(-66 + 5k) + 5(495 - 37k) = \dots \text{ (à faire) } = 33.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $74x + 10y = 66$ sont les couples $(-66 + 5k, 495 - 37k)$, où k entier relatif.

Exercice n°62 : résoudre l'équation diophantienne $81x + 46y = 23$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 81 et 46 :

$$\begin{aligned}(1) \quad & 81 = 46 \times 1 + 35 \\(2) \quad & 46 = 35 \times 1 + 11 \\(3) \quad & 35 = 11 \times 3 + 2 \\(4) \quad & 11 = 2 \times 5 + 1 \\(5) \quad & 2 = 1 \times 2 + 0\end{aligned}$$

donc $\text{PGCD}(81, 46) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}(4) \quad & 1 = 11 \times 1 + 2 \times (-5) \\(3) \quad & 1 = 11 \times 1 + (35 - 11 \times 3) \times (-5) \\& 1 = 35 \times (-5) + 11 \times 16 \\(2) \quad & 1 = 35 \times -5 + (46 - 35 \times 1) \times 16 \\& 1 = 46 \times 16 + 35 \times (-21) \\(1) \quad & 1 = 46 \times 16 + (81 - 46 \times 1) \times (-21) \\& 1 = 81 \times (-21) + 46 \times 37\end{aligned}$$

On a donc : $81 \times (-21) + 46 \times 37 = 1$

puis en multipliant par 23 : $81 \times (-483) + 46 \times 851 = 23$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $81x + 46y = 23$:

$$81x + 46y = 23 \text{ et } 81 \times (-483) + 46 \times 851 = 23$$

$$\text{donc, par soustraction : } 81(x + 483) + 46(y - 851) = 0$$

$$\text{donc } 81(x + 483) = 46(851 - y). \quad (*)$$

Or, 81 et 46 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $81 \mid 851 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $851 - y = 81k$

et alors, d'après (*): $x + 483 = 46k$.

• Réciproquement, si $x = -483 + 46k$ et $y = 851 - 81k$ alors :

$$81x + 46y = 81(-483 + 46k) + 46(851 - 81k) = \dots \text{ (à faire)} = 23.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $81x + 46y = 23$ sont les couples $(-483 + 46k, 851 - 81k)$, où k entier relatif.

Exercice n°63 : résoudre l'équation diophantienne $72x + 57y = 60$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 72 et 57 :

$$(1) \quad 72 = 57 \times 1 + 15$$

$$(2) \quad 57 = 15 \times 3 + 12$$

$$(3) \quad 15 = 12 \times 1 + 3$$

$$(4) \quad 12 = 3 \times 4 + 0$$

donc $\text{PGCD}(72, 57) = 3$.

En divisant par $\text{PGCD}(72, 57)$: $72x + 57y = 60 \Leftrightarrow 24x + 19y = 20$.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est $(4, -4)$.

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 24 et 19) et en multipliant par 20, on aurait trouvé la solution particulière $(80, -100)$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $24x + 19y = 20$:

$$24x + 19y = 20 \text{ et } 24 \times 4 + 19 \times (-4) = 20$$

$$\text{donc, par soustraction : } 24(x - 4) + 19(y + 4) = 0$$

$$\text{donc } 24(x - 4) = 19(-4 - y). \quad (*)$$

Or, 24 et 19 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $24 \mid -4 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-4 - y = 24k$

et alors, d'après (*): $x - 4 = 19k$.

• Réciproquement, si $x = 4 + 19k$ et $y = -4 - 24k$ alors :

$$24x + 19y = 24(4 + 19k) + 19(-4 - 24k) = \dots \text{ (à faire) } = 20.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $72x + 57y = 60$ sont les couples $(4 + 19k, -4 - 24k)$, où k entier relatif.

Exercice n°64 : résoudre l'équation diophantienne $74x + 17y = 74$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 74 et 17 :

$$(1) \quad 74 = 17 \times 4 + 6$$

$$(2) \quad 17 = 6 \times 2 + 5$$

$$(3) \quad 6 = 5 \times 1 + 1$$

$$(4) \quad 5 = 1 \times 5 + 0$$

donc $\text{PGCD}(74, 17) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est $(1, 0)$.

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 74 et 17) et en multipliant par 74, on aurait trouvé la solution particulière $(222, -962)$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $74x + 17y = 74$:

$$74x + 17y = 74 \text{ et } 74 \times 1 + 17 \times 0 = 74$$

$$\text{donc, par soustraction : } 74(x - 1) + 17y = 0$$

$$\text{donc } 74(x - 1) = -17y. \quad (*)$$

Or, 74 et 17 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $74 \mid -y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-y = 74k$

et alors, d'après (*): $x - 1 = 17k$.

• Réciproquement, si $x = 1 + 17k$ et $y = -74k$ alors :

$$74x + 17y = 74(1 + 17k) + 17(-74k) = \dots \text{ (à faire) } = 74.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $74x + 17y = 74$ sont les couples $(1 + 17k, -74k)$, où k entier relatif.

Exercice n°65 : résoudre l'équation diophantienne $2x + 54y = 6$.

CORRECTION

- $54 = 2 \times 27$
donc $\text{PGCD}(2, 54) = 2$.

En divisant par 2 : $2x + 54y = 6 \Leftrightarrow x + 27y = 3$.

- Conclusion : les solutions de l'équation $2x + 54y = 6$ sont évidemment les couples $(-27k + 3, k)$, où k entier relatif.

Exercice n°66 : résoudre l'équation diophantienne $69x + 63y = 84$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 69 et 63 :

$$(1) \quad 69 = 63 \times 1 + 6$$

$$(2) \quad 63 = 6 \times 10 + 3$$

$$(3) \quad 6 = 3 \times 2 + 0$$

donc $\text{PGCD}(69, 63) = 3$.

En divisant par $\text{PGCD}(69, 63)$: $69x + 63y = 84 \Leftrightarrow 23x + 21y = 28$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 23 et 21 :

$$(1) \quad 23 = 21 \times 1 + 2$$

$$(2) \quad 21 = 2 \times 10 + 1$$

$$(3) \quad 2 = 1 \times 2 + 0$$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(2) \quad 1 = 21 \times 1 + 2 \times (-10)$$

$$(1) \quad 1 = 21 \times 1 + (23 - 21 \times 1) \times (-10)$$

$$1 = 23 \times (-10) + 21 \times 11$$

On a donc : $23 \times (-10) + 21 \times 11 = 1$

puis en multipliant par 28 : $23 \times (-280) + 21 \times 308 = 28$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $23x + 21y = 28$:

$$23x + 21y = 28 \text{ et } 23 \times (-280) + 21 \times 308 = 28$$

$$\text{donc, par soustraction : } 23(x + 280) + 21(y - 308) = 0$$

$$\text{donc } 23(x + 280) = 21(308 - y). \quad (*)$$

Or, 23 et 21 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $23 \mid 308 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $308 - y = 23k$

et alors, d'après (*): $x + 280 = 21k$.

• Réciproquement, si $x = -280 + 21k$ et $y = 308 - 23k$ alors :

$$23x + 21y = 23(-280 + 21k) + 21(308 - 23k) = \dots \text{ (à faire)} = 28.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $69x + 63y = 84$ sont les couples $(-280 + 21k, 308 - 23k)$, où k entier relatif.

Exercice n°67 : résoudre l'équation diophantienne $91x + 48y = 23$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 91 et 48 :

$$\begin{aligned}(1) \quad & 91 = 48 \times 1 + 43 \\(2) \quad & 48 = 43 \times 1 + 5 \\(3) \quad & 43 = 5 \times 8 + 3 \\(4) \quad & 5 = 3 \times 1 + 2 \\(5) \quad & 3 = 2 \times 1 + 1 \\(6) \quad & 2 = 1 \times 2 + 0\end{aligned}$$

donc $\text{PGCD}(91, 48) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}(5) \quad & 1 = 3 \times 1 + 2 \times (-1) \\(4) \quad & 1 = 3 \times 1 + (5-3 \times 1) \times (-1) \\& 1 = 5 \times (-1) + 3 \times 2 \\(3) \quad & 1 = 5 \times -1 + (43-5 \times 8) \times 2 \\& 1 = 43 \times 2 + 5 \times (-17) \\(2) \quad & 1 = 43 \times 2 + (48-43 \times 1) \times (-17) \\& 1 = 48 \times (-17) + 43 \times 19 \\(1) \quad & 1 = 48 \times -17 + (91-48 \times 1) \times 19 \\& 1 = 91 \times 19 + 48 \times (-36)\end{aligned}$$

On a donc : $91 \times 19 + 48 \times (-36) = 1$

puis en multipliant par 23 : $91 \times 437 + 48 \times (-828) = 23$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $91x + 48y = 23$:

$$91x + 48y = 23 \text{ et } 91 \times 437 + 48 \times (-828) = 23$$

$$\text{donc, par soustraction : } 91(x - 437) + 48(y + 828) = 0$$

$$\text{donc } 91(x - 437) = 48(-828 - y). \quad (*)$$

Or, 91 et 48 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $91 \mid -828 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-828 - y = 91k$

et alors, d'après (*): $x - 437 = 48k$.

• Réciproquement, si $x = 437 + 48k$ et $y = -828 - 91k$ alors :

$$91x + 48y = 91(437 + 48k) + 48(-828 - 91k) = \dots \text{ (à faire) } = 23.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $91x + 48y = 23$ sont les couples $(437 + 48k, -828 - 91k)$, où k entier relatif.

Exercice n°68 : résoudre l'équation diophantienne $70x + 22y = 48$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 70 et 22 :

$$(1) \quad 70 = 22 \times 3 + 4$$

$$(2) \quad 22 = 4 \times 5 + 2$$

$$(3) \quad 4 = 2 \times 2 + 0$$

donc $\text{PGCD}(70, 22) = 2$.

En divisant par $\text{PGCD}(70, 22)$: $70x + 22y = 48 \Leftrightarrow 35x + 11y = 24$.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est $(1, -1)$.

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 35 et 11) et en multipliant par 24, on aurait trouvé la solution particulière $(-120, 384)$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $35x + 11y = 24$:

$$35x + 11y = 24 \text{ et } 35 \times 1 + 11 \times (-1) = 24$$

$$\text{donc, par soustraction : } 35(x - 1) + 11(y + 1) = 0$$

$$\text{donc } 35(x - 1) = 11(-1 - y). \quad (*)$$

Or, 35 et 11 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $35 \mid -1 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-1 - y = 35k$

et alors, d'après (*): $x - 1 = 11k$.

• Réciproquement, si $x = 1 + 11k$ et $y = -1 - 35k$ alors :

$$35x + 11y = 35(1 + 11k) + 11(-1 - 35k) = \dots \text{ (à faire) } = 24.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $70x + 22y = 48$ sont les couples $(1 + 11k, -1 - 35k)$, où k entier relatif.

Exercice n°69 : résoudre l'équation diophantienne $79x + 89y = 26$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 89 et 79 :

$$(1) \quad 89 = 79 \times 1 + 10$$

$$(2) \quad 79 = 10 \times 7 + 9$$

$$(3) \quad 10 = 9 \times 1 + 1$$

$$(4) \quad 9 = 1 \times 9 + 0$$

donc $\text{PGCD}(79, 89) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(3) \quad 1 = 10 \times 1 + 9 \times (-1)$$

$$(2) \quad 1 = 10 \times 1 + (79 - 10 \times 7) \times (-1)$$

$$1 = 79 \times (-1) + 10 \times 8$$

$$(1) \quad 1 = 79 \times (-1) + (89 - 79 \times 1) \times 8$$

$$1 = 89 \times 8 + 79 \times (-9)$$

On a donc : $79 \times (-9) + 89 \times 8 = 1$

puis en multipliant par 26 : $79 \times (-234) + 89 \times 208 = 26$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $79x + 89y = 26$:

$$79x + 89y = 26 \text{ et } 79 \times (-234) + 89 \times 208 = 26$$

$$\text{donc, par soustraction : } 79(x + 234) + 89(y - 208) = 0$$

$$\text{donc } 79(x + 234) = 89(208 - y). \quad (*)$$

Or, 79 et 89 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $79 \mid 208 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $208 - y = 79k$

et alors, d'après (*): $x + 234 = 89k$.

• Réciproquement, si $x = -234 + 89k$ et $y = 208 - 79k$ alors :

$$79x + 89y = 79(-234 + 89k) + 89(208 - 79k) = \dots \text{ (à faire) } = 26.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $79x + 89y = 26$ sont les couples $(-234 + 89k, 208 - 79k)$, où k entier relatif.

Exercice n°70 : résoudre l'équation diophantienne $45x + 26y = 34$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 45 et 26 :

$$\begin{aligned}(1) \quad & 45 = 26 \times 1 + 19 \\(2) \quad & 26 = 19 \times 1 + 7 \\(3) \quad & 19 = 7 \times 2 + 5 \\(4) \quad & 7 = 5 \times 1 + 2 \\(5) \quad & 5 = 2 \times 2 + 1 \\(6) \quad & 2 = 1 \times 2 + 0\end{aligned}$$

donc $\text{PGCD}(45, 26) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}(5) \quad & 1 = 5 \times 1 + 2 \times (-2) \\(4) \quad & 1 = 5 \times 1 + (7-5 \times 1) \times (-2) \\& 1 = 7 \times (-2) + 5 \times 3 \\(3) \quad & 1 = 7 \times -2 + (19-7 \times 2) \times 3 \\& 1 = 19 \times 3 + 7 \times (-8) \\(2) \quad & 1 = 19 \times 3 + (26-19 \times 1) \times (-8) \\& 1 = 26 \times (-8) + 19 \times 11 \\(1) \quad & 1 = 26 \times -8 + (45-26 \times 1) \times 11 \\& 1 = 45 \times 11 + 26 \times (-19)\end{aligned}$$

On a donc : $45 \times 11 + 26 \times (-19) = 1$

puis en multipliant par 34 : $45 \times 374 + 26 \times (-646) = 34$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $45x + 26y = 34$:

$$45x + 26y = 34 \text{ et } 45 \times 374 + 26 \times (-646) = 34$$

$$\text{donc, par soustraction : } 45(x - 374) + 26(y + 646) = 0$$

$$\text{donc } 45(x - 374) = 26(-646 - y). \quad (*)$$

Or, 45 et 26 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $45 \mid -646 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-646 - y = 45k$

et alors, d'après (*): $x - 374 = 26k$.

• Réciproquement, si $x = 374 + 26k$ et $y = -646 - 45k$ alors :

$$45x + 26y = 45(374 + 26k) + 26(-646 - 45k) = \dots (\text{à faire}) = 34.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $45x + 26y = 34$ sont les couples

$(374 + 26k, -646 - 45k)$, où k entier relatif.

Exercice n°71 : résoudre l'équation diophantienne $87x + 24y = 37$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 87 et 24 :

$$(1) \quad 87 = 24 \times 3 + 15$$

$$(2) \quad 24 = 15 \times 1 + 9$$

$$(3) \quad 15 = 9 \times 1 + 6$$

$$(4) \quad 9 = 6 \times 1 + 3$$

$$(5) \quad 6 = 3 \times 2 + 0$$

donc $\text{PGCD}(87, 24) = 3$.

• $37 = 3 \times 12 + 1$ donc 3 ne divise pas 37

donc l'équation diophantienne $87x + 24y = 37$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°72 : résoudre l'équation diophantienne $51x + 45y = 6$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 51 et 45 :

$$(1) \quad 51 = 45 \times 1 + 6$$

$$(2) \quad 45 = 6 \times 7 + 3$$

$$(3) \quad 6 = 3 \times 2 + 0$$

donc $\text{PGCD}(51, 45) = 3$.

En divisant par $\text{PGCD}(51, 45)$: $51x + 45y = 6 \Leftrightarrow 17x + 15y = 2$.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est $(1, -1)$.

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 17 et 15) et en multipliant par 2, on aurait trouvé la solution particulière $(-14, 16)$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $17x + 15y = 2$:

$$17x + 15y = 2 \text{ et } 17 \times 1 + 15 \times (-1) = 2$$

$$\text{donc, par soustraction : } 17(x - 1) + 15(y + 1) = 0$$

$$\text{donc } 17(x - 1) = 15(-1 - y). \quad (*)$$

Or, 17 et 15 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $17 \mid -1 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-1 - y = 17k$

et alors, d'après (*): $x - 1 = 15k$.

• Réciproquement, si $x = 1 + 15k$ et $y = -1 - 17k$ alors :

$$17x + 15y = 17(1 + 15k) + 15(-1 - 17k) = \dots \text{ (à faire) } = 2.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $51x + 45y = 6$ sont les couples $(1 + 15k, -1 - 17k)$, où k entier relatif.

Exercice n°73 : résoudre l'équation diophantienne $24x + 44y = 8$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 44 et 24 :

$$(1) \quad 44 = 24 \times 1 + 20$$

$$(2) \quad 24 = 20 \times 1 + 4$$

$$(3) \quad 20 = 4 \times 5 + 0$$

donc $\text{PGCD}(24, 44) = 4$.

En divisant par $\text{PGCD}(24, 44)$: $24x + 44y = 8 \Leftrightarrow 6x + 11y = 2$.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est $(4, -2)$.

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 11 et 6) et en multipliant par 2, on aurait trouvé la solution particulière $(4, -2)$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $6x + 11y = 2$:

$$6x + 11y = 2 \text{ et } 6 \times 4 + 11 \times (-2) = 2$$

$$\text{donc, par soustraction : } 6(x - 4) + 11(y + 2) = 0$$

$$\text{donc } 6(x - 4) = 11(-2 - y). \quad (*)$$

Or, 6 et 11 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $6 \mid -2 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-2 - y = 6k$

et alors, d'après (*): $x - 4 = 11k$.

• Réciproquement, si $x = 4 + 11k$ et $y = -2 - 6k$ alors :

$$6x + 11y = 6(4 + 11k) + 11(-2 - 6k) = \dots \text{ (à faire) } = 2.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $24x + 44y = 8$ sont les couples $(4 + 11k, -2 - 6k)$, où k entier relatif.

Exercice n°74 : résoudre l'équation diophantienne $33x + 78y = 66$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 78 et 33 :

$$(1) \quad 78 = 33 \times 2 + 12$$

$$(2) \quad 33 = 12 \times 2 + 9$$

$$(3) \quad 12 = 9 \times 1 + 3$$

$$(4) \quad 9 = 3 \times 3 + 0$$

donc $\text{PGCD}(33, 78) = 3$.

En divisant par $\text{PGCD}(33, 78)$: $33x + 78y = 66 \Leftrightarrow 11x + 26y = 22$.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est $(2, 0)$.

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 26 et 11) et en multipliant par 22, on aurait trouvé la solution particulière $(-154, 66)$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $11x + 26y = 22$:

$$11x + 26y = 22 \text{ et } 11 \times 2 + 26 \times 0 = 22$$

$$\text{donc, par soustraction : } 11(x - 2) + 26y = 0$$

$$\text{donc } 11(x - 2) = -26y. \quad (*)$$

Or, 11 et 26 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $11 \mid -y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-y = 11k$

et alors, d'après (*): $x - 2 = 26k$.

• Réciproquement, si $x = 2 + 26k$ et $y = -11k$ alors :

$$11x + 26y = 11(2 + 26k) + 26(-11k) = \dots \text{ (à faire) } = 22.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $33x + 78y = 66$ sont les couples $(2 + 26k, -11k)$, où k entier relatif.

Exercice n°75 : résoudre l'équation diophantienne $16x + 94y = 24$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 94 et 16 :

$$(1) \quad 94 = 16 \times 5 + 14$$

$$(2) \quad 16 = 14 \times 1 + 2$$

$$(3) \quad 14 = 2 \times 7 + 0$$

donc $\text{PGCD}(16, 94) = 2$.

En divisant par $\text{PGCD}(16, 94)$: $16x + 94y = 24 \Leftrightarrow 8x + 47y = 12$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 8 et 47 :

$$(1) \quad 47 = 8 \times 5 + 7$$

$$(2) \quad 8 = 7 \times 1 + 1$$

$$(3) \quad 7 = 1 \times 7 + 0$$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(2) \quad 1 = 8 \times 1 + 7 \times (-1)$$

$$(1) \quad 1 = 8 \times 1 + (47 - 8 \times 5) \times (-1)$$

$$1 = 47 \times (-1) + 8 \times 6$$

On a donc : $8 \times 6 + 47 \times (-1) = 1$

puis en multipliant par 12 : $8 \times 72 + 47 \times (-12) = 12$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $8x + 47y = 12$:

$$8x + 47y = 12 \text{ et } 8 \times 72 + 47 \times (-12) = 12$$

$$\text{donc, par soustraction : } 8(x - 72) + 47(y + 12) = 0$$

$$\text{donc } 8(x - 72) = 47(-12 - y). \quad (*)$$

Or, 8 et 47 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $8 \mid -12 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-12 - y = 8k$

et alors, d'après (*): $x - 72 = 47k$.

• Réciproquement, si $x = 72 + 47k$ et $y = -12 - 8k$ alors :

$$8x + 47y = 8(72 + 47k) + 47(-12 - 8k) = \dots \text{ (à faire) } = 12.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $16x + 94y = 24$ sont les couples $(72 + 47k, -12 - 8k)$, où k entier relatif.

Exercice n°76 : résoudre l'équation diophantienne $41x + 24y = 13$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 41 et 24 :

$$\begin{aligned}(1) \quad & 41 = 24 \times 1 + 17 \\(2) \quad & 24 = 17 \times 1 + 7 \\(3) \quad & 17 = 7 \times 2 + 3 \\(4) \quad & 7 = 3 \times 2 + 1 \\(5) \quad & 3 = 1 \times 3 + 0\end{aligned}$$

donc $\text{PGCD}(41, 24) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}(4) \quad & 1 = 7 \times 1 + 3 \times (-2) \\(3) \quad & 1 = 7 \times 1 + (17-7 \times 2) \times (-2) \\& 1 = 17 \times (-2) + 7 \times 5 \\(2) \quad & 1 = 17 \times -2 + (24-17 \times 1) \times 5 \\& 1 = 24 \times 5 + 17 \times (-7) \\(1) \quad & 1 = 24 \times 5 + (41-24 \times 1) \times (-7) \\& 1 = 41 \times (-7) + 24 \times 12\end{aligned}$$

On a donc : $41 \times (-7) + 24 \times 12 = 1$

puis en multipliant par 13 : $41 \times (-91) + 24 \times 156 = 13$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $41x + 24y = 13$:

$$41x + 24y = 13 \text{ et } 41 \times (-91) + 24 \times 156 = 13$$

$$\text{donc, par soustraction : } 41(x + 91) + 24(y - 156) = 0$$

$$\text{donc } 41(x + 91) = 24(156 - y). \quad (*)$$

Or, 41 et 24 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $41 \mid 156 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $156 - y = 41k$

et alors, d'après (*): $x + 91 = 24k$.

• Réciproquement, si $x = -91 + 24k$ et $y = 156 - 41k$ alors :

$$41x + 24y = 41(-91 + 24k) + 24(156 - 41k) = \dots \text{ (à faire)} = 13.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $41x + 24y = 13$ sont les couples $(-91 + 24k, 156 - 41k)$, où k entier relatif.

Exercice n°77 : résoudre l'équation diophantienne $70x + 46y = 34$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 70 et 46 :

$$(1) \quad 70 = 46 \times 1 + 24$$

$$(2) \quad 46 = 24 \times 1 + 22$$

$$(3) \quad 24 = 22 \times 1 + 2$$

$$(4) \quad 22 = 2 \times 11 + 0$$

donc $\text{PGCD}(70, 46) = 2$.

En divisant par $\text{PGCD}(70, 46)$: $70x + 46y = 34 \Leftrightarrow 35x + 23y = 17$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 35 et 23 :

$$(1) \quad 35 = 23 \times 1 + 12$$

$$(2) \quad 23 = 12 \times 1 + 11$$

$$(3) \quad 12 = 11 \times 1 + 1$$

$$(4) \quad 11 = 1 \times 11 + 0$$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(3) \quad 1 = 12 \times 1 + 11 \times (-1)$$

$$(2) \quad 1 = 12 \times 1 + (23 - 12 \times 1) \times (-1)$$

$$1 = 23 \times (-1) + 12 \times 2$$

$$(1) \quad 1 = 23 \times (-1) + (35 - 23 \times 1) \times 2$$

$$1 = 35 \times 2 + 23 \times (-3)$$

On a donc : $35 \times 2 + 23 \times (-3) = 1$

puis en multipliant par 17 : $35 \times 34 + 23 \times (-51) = 17$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $35x + 23y = 17$:

$$35x + 23y = 17 \text{ et } 35 \times 34 + 23 \times (-51) = 17$$

$$\text{donc, par soustraction : } 35(x - 34) + 23(y + 51) = 0$$

$$\text{donc } 35(x - 34) = 23(-51 - y). \quad (*)$$

Or, 35 et 23 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $35 \mid -51 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-51 - y = 35k$

et alors, d'après (*): $x - 34 = 23k$.

• Réciproquement, si $x = 34 + 23k$ et $y = -51 - 35k$ alors :

$$35x + 23y = 35(34 + 23k) + 23(-51 - 35k) = \dots \text{ (à faire)} = 17.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $70x + 46y = 34$ sont les couples $(34 + 23k, -51 - 35k)$, où k entier relatif.

Exercice n°78 : résoudre l'équation diophantienne $52x + 86y = 25$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 86 et 52 :

$$(1) \quad 86 = 52 \times 1 + 34$$

$$(2) \quad 52 = 34 \times 1 + 18$$

$$(3) \quad 34 = 18 \times 1 + 16$$

$$(4) \quad 18 = 16 \times 1 + 2$$

$$(5) \quad 16 = 2 \times 8 + 0$$

donc $\text{PGCD}(52, 86) = 2$.

• $25 = 2 \times 12 + 1$ donc 2 ne divise pas 25

donc l'équation diophantienne $52x + 86y = 25$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°79 : résoudre l'équation diophantienne $6x + y = 100$.

CORRECTION

- Conclusion : les solutions de l'équation $6x + y = 100$ sont évidemment les couples $(k, -6k + 100)$, où k entier relatif.

Exercice n°80 : résoudre l'équation diophantienne $31x + 30y = 30$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 31 et 30 :

$$(1) \quad 31 = 30 \times 1 + 1$$

$$(2) \quad 30 = 1 \times 30 + 0$$

donc $\text{PGCD}(31, 30) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est $(0, 1)$.

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 31 et 30) et en multipliant par 30, on aurait trouvé la solution particulière $(30, -30)$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $31x + 30y = 30$:

$$31x + 30y = 30 \text{ et } 30 \times 1 = 30$$

$$\text{donc, par soustraction : } 31x + 30(y - 1) = 0$$

$$\text{donc } 31x = 30(1 - y). \quad (*)$$

Or, 31 et 30 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $31 \mid 1 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $1 - y = 31k$

et alors, d'après $(*)$: $x = 30k$.

• Réciproquement, si $x = 30k$ et $y = 1 - 31k$ alors :

$$31x + 30y = 31(-30k) + 30(1 - 31k) = \dots \text{ (à faire) } = 30.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $31x + 30y = 30$ sont les couples $(30k, 1 - 31k)$, où k entier relatif.

Exercice n°81 : résoudre l'équation diophantienne $30x + 2y = 26$.

CORRECTION

- $30 = 2 \times 15$
donc $\text{PGCD}(30, 2) = 2$.

En divisant par 2 : $30x + 2y = 26 \Leftrightarrow 15x + y = 13$.

- Conclusion : les solutions de l'équation $30x + 2y = 26$ sont évidemment les couples $(k, -15k + 13)$, où k entier relatif.

Exercice n°82 : résoudre l'équation diophantienne $97x + 56y = 15$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 97 et 56 :

$$\begin{array}{l} (1) \quad 97 = 56 \times 1 + 41 \\ (2) \quad 56 = 41 \times 1 + 15 \\ (3) \quad 41 = 15 \times 2 + 11 \\ (4) \quad 15 = 11 \times 1 + 4 \\ (5) \quad 11 = 4 \times 2 + 3 \\ (6) \quad 4 = 3 \times 1 + 1 \\ (7) \quad 3 = 1 \times 3 + 0 \end{array}$$

donc $\text{PGCD}(97, 56) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est $(-1, 2)$.

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 97 et 56) et en multipliant par 15, on aurait trouvé la solution particulière $(-225, 390)$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $97x + 56y = 15$:

$$97x + 56y = 15 \text{ et } 97 \times (-1) + 56 \times 2 = 15$$

$$\text{donc, par soustraction : } 97(x + 1) + 56(y - 2) = 0$$

$$\text{donc } 97(x + 1) = 56(2 - y). \quad (*)$$

Or, 97 et 56 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $97 \mid 2 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $2 - y = 97k$

et alors, d'après (*): $x + 1 = 56k$.

• Réciproquement, si $x = -1 + 56k$ et $y = 2 - 97k$ alors :

$$97x + 56y = 97(-1 + 56k) + 56(2 - 97k) = \dots \text{ (à faire) } = 15.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $97x + 56y = 15$ sont les couples $(-1 + 56k, 2 - 97k)$, où k entier relatif.

Exercice n°83 : résoudre l'équation diophantienne $22x + 92y = 98$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 92 et 22 :

$$(1) \quad 92 = 22 \times 4 + 4$$

$$(2) \quad 22 = 4 \times 5 + 2$$

$$(3) \quad 4 = 2 \times 2 + 0$$

donc $\text{PGCD}(22, 92) = 2$.

En divisant par $\text{PGCD}(22, 92)$: $22x + 92y = 98 \Leftrightarrow 11x + 46y = 49$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 11 et 46 :

$$(1) \quad 46 = 11 \times 4 + 2$$

$$(2) \quad 11 = 2 \times 5 + 1$$

$$(3) \quad 2 = 1 \times 2 + 0$$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(2) \quad 1 = 11 \times 1 + 2 \times (-5)$$

$$(1) \quad 1 = 11 \times 1 + (46 - 11 \times 4) \times (-5)$$

$$1 = 46 \times (-5) + 11 \times 21$$

On a donc : $11 \times 21 + 46 \times (-5) = 1$

puis en multipliant par 49 : $11 \times 1029 + 46 \times (-245) = 49$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $11x + 46y = 49$:

$$11x + 46y = 49 \text{ et } 11 \times 1029 + 46 \times (-245) = 49$$

$$\text{donc, par soustraction : } 11(x - 1029) + 46(y + 245) = 0$$

$$\text{donc } 11(x - 1029) = 46(-245 - y). \quad (*)$$

Or, 11 et 46 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $11 \mid -245 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-245 - y = 11k$

et alors, d'après (*): $x - 1029 = 46k$.

• Réciproquement, si $x = 1029 + 46k$ et $y = -245 - 11k$ alors :

$$11x + 46y = 11(1029 + 46k) + 46(-245 - 11k) = \dots \text{ (à faire)} = 49.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $22x + 92y = 98$ sont les couples $(1029 + 46k, -245 - 11k)$, où k entier relatif.

Exercice n°84 : résoudre l'équation diophantienne $21x + 55y = 46$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 55 et 21 :

$$\begin{aligned}(1) \quad & 55 = 21 \times 2 + 13 \\(2) \quad & 21 = 13 \times 1 + 8 \\(3) \quad & 13 = 8 \times 1 + 5 \\(4) \quad & 8 = 5 \times 1 + 3 \\(5) \quad & 5 = 3 \times 1 + 2 \\(6) \quad & 3 = 2 \times 1 + 1 \\(7) \quad & 2 = 1 \times 2 + 0\end{aligned}$$

donc $\text{PGCD}(21, 55) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}(6) \quad & 1 = 3 \times 1 + 2 \times (-1) \\(5) \quad & 1 = 3 \times 1 + (5-3 \times 1) \times (-1) \\& 1 = 5 \times (-1) + 3 \times 2 \\(4) \quad & 1 = 5 \times -1 + (8-5 \times 1) \times 2 \\& 1 = 8 \times 2 + 5 \times (-3) \\(3) \quad & 1 = 8 \times 2 + (13-8 \times 1) \times (-3) \\& 1 = 13 \times (-3) + 8 \times 5 \\(2) \quad & 1 = 13 \times -3 + (21-13 \times 1) \times 5 \\& 1 = 21 \times 5 + 13 \times (-8) \\(1) \quad & 1 = 21 \times 5 + (55-21 \times 2) \times (-8) \\& 1 = 55 \times (-8) + 21 \times 21\end{aligned}$$

On a donc : $21 \times 21 + 55 \times (-8) = 1$

puis en multipliant par 46 : $21 \times 966 + 55 \times (-368) = 46$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $21x + 55y = 46$:

$$21x + 55y = 46 \text{ et } 21 \times 966 + 55 \times (-368) = 46$$

$$\text{donc, par soustraction : } 21(x - 966) + 55(y + 368) = 0$$

$$\text{donc } 21(x - 966) = 55(-368 - y). \quad (*)$$

Or, 21 et 55 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $21 \mid -368 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-368 - y = 21k$

et alors, d'après (*): $x - 966 = 55k$.

• Réciproquement, si $x = 966 + 55k$ et $y = -368 - 21k$ alors :

$$21x + 55y = 21(966 + 55k) + 55(-368 - 21k) = \dots \text{ (à faire)} = 46.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $21x + 55y = 46$ sont les couples $(966 + 55k, -368 - 21k)$, où k entier relatif.

Exercice n°85 : résoudre l'équation diophantienne $82x + 74y = 38$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 82 et 74 :

$$(1) \quad 82 = 74 \times 1 + 8$$

$$(2) \quad 74 = 8 \times 9 + 2$$

$$(3) \quad 8 = 2 \times 4 + 0$$

donc $\text{PGCD}(82, 74) = 2$.

En divisant par $\text{PGCD}(82, 74)$: $82x + 74y = 38 \Leftrightarrow 41x + 37y = 19$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 41 et 37 :

$$(1) \quad 41 = 37 \times 1 + 4$$

$$(2) \quad 37 = 4 \times 9 + 1$$

$$(3) \quad 4 = 1 \times 4 + 0$$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(2) \quad 1 = 37 \times 1 + 4 \times (-9)$$

$$(1) \quad 1 = 37 \times 1 + (41 - 37 \times 1) \times (-9)$$

$$1 = 41 \times (-9) + 37 \times 10$$

On a donc : $41 \times (-9) + 37 \times 10 = 1$

puis en multipliant par 19 : $41 \times (-171) + 37 \times 190 = 19$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $41x + 37y = 19$:

$41x + 37y = 19$ et $41 \times (-171) + 37 \times 190 = 19$

donc, par soustraction : $41(x + 171) + 37(y - 190) = 0$

donc $41(x + 171) = 37(190 - y)$. (*)

Or, 41 et 37 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $41 \mid 190 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $190 - y = 41k$

et alors, d'après (*): $x + 171 = 37k$.

• Réciproquement, si $x = -171 + 37k$ et $y = 190 - 41k$ alors :

$41x + 37y = 41(-171 + 37k) + 37(190 - 41k) = \dots$ (à faire) $= 19$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $82x + 74y = 38$ sont les couples $(-171 + 37k, 190 - 41k)$, où k entier relatif.

Exercice n°86 : résoudre l'équation diophantienne $2x + 71y = 54$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 71 et 2 :

$$(1) \quad 71 = 2 \times 35 + 1$$

$$(2) \quad 2 = 1 \times 2 + 0$$

donc $\text{PGCD}(2, 71) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(1) \quad 1 = 71 \times 1 + 2 \times (-35)$$

On a donc : $2 \times (-35) + 71 \times 1 = 1$

puis en multipliant par 54 : $2 \times (-1890) + 71 \times 54 = 54$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $2x + 71y = 54$:

$$2x + 71y = 54 \text{ et } 2 \times (-1890) + 71 \times 54 = 54$$

$$\text{donc, par soustraction : } 2(x + 1890) + 71(y - 54) = 0$$

$$\text{donc } 2(x + 1890) = 71(54 - y). \quad (*)$$

Or, 2 et 71 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $2 \mid 54 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $54 - y = 2k$

et alors, d'après (*): $x + 1890 = 71k$.

• Réciproquement, si $x = -1890 + 71k$ et $y = 54 - 2k$ alors :

$$2x + 71y = 2(-1890 + 71k) + 71(54 - 2k) = \dots \text{ (à faire) } = 54.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $2x + 71y = 54$ sont les couples $(-1890 + 71k, 54 - 2k)$, où k entier relatif.

Exercice n°87 : résoudre l'équation diophantienne $6x + 70y = 73$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 70 et 6 :

$$(1) \quad 70 = 6 \times 11 + 4$$

$$(2) \quad 6 = 4 \times 1 + 2$$

$$(3) \quad 4 = 2 \times 2 + 0$$

donc $\text{PGCD}(6, 70) = 2$.

• $73 = 2 \times 36 + 1$ donc 2 ne divise pas 73

donc l'équation diophantienne $6x + 70y = 73$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°88 : résoudre l'équation diophantienne $15x + 93y = 90$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 93 et 15 :

$$(1) \quad 93 = 15 \times 6 + 3$$

$$(2) \quad 15 = 3 \times 5 + 0$$

donc $\text{PGCD}(15, 93) = 3$.

En divisant par $\text{PGCD}(15, 93)$: $15x + 93y = 90 \Leftrightarrow 5x + 31y = 30$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 5 et 31 :

$$(1) \quad 31 = 5 \times 6 + 1$$

$$(2) \quad 5 = 1 \times 5 + 0$$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(1) \quad 1 = 31 \times 1 + 5 \times (-6)$$

On a donc : $5 \times (-6) + 31 \times 1 = 1$

puis en multipliant par 30 : $5 \times (-180) + 31 \times 30 = 30$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $5x + 31y = 30$:

$$5x + 31y = 30 \text{ et } 5 \times (-180) + 31 \times 30 = 30$$

$$\text{donc, par soustraction : } 5(x + 180) + 31(y - 30) = 0$$

$$\text{donc } 5(x + 180) = 31(30 - y). \quad (*)$$

Or, 5 et 31 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $5 \mid 30 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $30 - y = 5k$

et alors, d'après (*): $x + 180 = 31k$.

• Réciproquement, si $x = -180 + 31k$ et $y = 30 - 5k$ alors :

$$5x + 31y = 5(-180 + 31k) + 31(30 - 5k) = \dots \text{ (à faire) } = 30.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $15x + 93y = 90$ sont les couples $(-180 + 31k, 30 - 5k)$, où k entier relatif.

Exercice n°89 : résoudre l'équation diophantienne $54x + 56y = 92$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 56 et 54 :

$$(1) \quad 56 = 54 \times 1 + 2$$

$$(2) \quad 54 = 2 \times 27 + 0$$

donc $\text{PGCD}(54, 56) = 2$.

En divisant par $\text{PGCD}(54, 56)$: $54x + 56y = 92 \Leftrightarrow 27x + 28y = 46$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 27 et 28 :

$$(1) \quad 28 = 27 \times 1 + 1$$

$$(2) \quad 27 = 1 \times 27 + 0$$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(1) \quad 1 = 28 \times 1 + 27 \times (-1)$$

On a donc : $27 \times (-1) + 28 \times 1 = 1$

puis en multipliant par 46 : $27 \times (-46) + 28 \times 46 = 46$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $27x + 28y = 46$:

$$27x + 28y = 46 \text{ et } 27 \times (-46) + 28 \times 46 = 46$$

$$\text{donc, par soustraction : } 27(x + 46) + 28(y - 46) = 0$$

$$\text{donc } 27(x + 46) = 28(46 - y). \quad (*)$$

Or, 27 et 28 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $27 \mid 46 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $46 - y = 27k$

et alors, d'après (*): $x + 46 = 28k$.

• Réciproquement, si $x = -46 + 28k$ et $y = 46 - 27k$ alors :

$$27x + 28y = 27(-46 + 28k) + 28(46 - 27k) = \dots \text{ (à faire) } = 46.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $54x + 56y = 92$ sont les couples $(-46 + 28k, 46 - 27k)$, où k entier relatif.

Exercice n°90 : résoudre l'équation diophantienne $55x + 11y = 6$.

CORRECTION

- $55 = 11 \times 5$
donc $\text{PGCD}(55, 11) = 11$.

- 11 ne divise pas 6
donc l'équation diophantienne $55x + 11y = 6$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°91 : résoudre l'équation diophantienne $84x + 97y = 91$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 97 et 84 :

$$(1) \quad 97 = 84 \times 1 + 13$$

$$(2) \quad 84 = 13 \times 6 + 6$$

$$(3) \quad 13 = 6 \times 2 + 1$$

$$(4) \quad 6 = 1 \times 6 + 0$$

donc $\text{PGCD}(84, 97) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(3) \quad 1 = 13 \times 1 + 6 \times (-2)$$

$$(2) \quad 1 = 13 \times 1 + (84 - 13 \times 6) \times (-2)$$

$$1 = 84 \times (-2) + 13 \times 13$$

$$(1) \quad 1 = 84 \times -2 + (97 - 84 \times 1) \times 13$$

$$1 = 97 \times 13 + 84 \times (-15)$$

On a donc : $84 \times (-15) + 97 \times 13 = 1$

puis en multipliant par 91 : $84 \times (-1365) + 97 \times 1183 = 91$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $84x + 97y = 91$:

$$84x + 97y = 91 \text{ et } 84 \times (-1365) + 97 \times 1183 = 91$$

$$\text{donc, par soustraction : } 84(x + 1365) + 97(y - 1183) = 0$$

$$\text{donc } 84(x + 1365) = 97(1183 - y). \quad (*)$$

Or, 84 et 97 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $84 \mid 1183 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $1183 - y = 84k$

et alors, d'après (*): $x + 1365 = 97k$.

• Réciproquement, si $x = -1365 + 97k$ et $y = 1183 - 84k$ alors :

$$84x + 97y = 84(-1365 + 97k) + 97(1183 - 84k) = \dots \text{ (à faire) } = 91.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $84x + 97y = 91$ sont les couples $(-1365 + 97k, 1183 - 84k)$, où k entier relatif.

Exercice n°92 : résoudre l'équation diophantienne $32x + 14y = 44$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 32 et 14 :

$$(1) \quad 32 = 14 \times 2 + 4$$

$$(2) \quad 14 = 4 \times 3 + 2$$

$$(3) \quad 4 = 2 \times 2 + 0$$

donc $\text{PGCD}(32, 14) = 2$.

En divisant par $\text{PGCD}(32, 14)$: $32x + 14y = 44 \Leftrightarrow 16x + 7y = 22$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 16 et 7 :

$$(1) \quad 16 = 7 \times 2 + 2$$

$$(2) \quad 7 = 2 \times 3 + 1$$

$$(3) \quad 2 = 1 \times 2 + 0$$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(2) \quad 1 = 7 \times 1 + 2 \times (-3)$$

$$(1) \quad 1 = 7 \times 1 + (16 - 7 \times 2) \times (-3)$$

$$1 = 16 \times (-3) + 7 \times 7$$

On a donc : $16 \times (-3) + 7 \times 7 = 1$

puis en multipliant par 22 : $16 \times (-66) + 7 \times 154 = 22$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $16x + 7y = 22$:

$$16x + 7y = 22 \text{ et } 16 \times (-66) + 7 \times 154 = 22$$

$$\text{donc, par soustraction : } 16(x + 66) + 7(y - 154) = 0$$

$$\text{donc } 16(x + 66) = 7(154 - y). \quad (*)$$

Or, 16 et 7 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $16 \mid 154 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $154 - y = 16k$

et alors, d'après (*): $x + 66 = 7k$.

• Réciproquement, si $x = -66 + 7k$ et $y = 154 - 16k$ alors :

$$16x + 7y = 16(-66 + 7k) + 7(154 - 16k) = \dots \text{ (à faire) } = 22.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $32x + 14y = 44$ sont les couples $(-66 + 7k, 154 - 16k)$, où k entier relatif.

Exercice n°93 : résoudre l'équation diophantienne $69x + 60y = 45$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 69 et 60 :

$$(1) \quad 69 = 60 \times 1 + 9$$

$$(2) \quad 60 = 9 \times 6 + 6$$

$$(3) \quad 9 = 6 \times 1 + 3$$

$$(4) \quad 6 = 3 \times 2 + 0$$

donc $\text{PGCD}(69, 60) = 3$.

En divisant par $\text{PGCD}(69, 60)$: $69x + 60y = 45 \Leftrightarrow 23x + 20y = 15$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 23 et 20 :

$$(1) \quad 23 = 20 \times 1 + 3$$

$$(2) \quad 20 = 3 \times 6 + 2$$

$$(3) \quad 3 = 2 \times 1 + 1$$

$$(4) \quad 2 = 1 \times 2 + 0$$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(3) \quad 1 = 3 \times 1 + 2 \times (-1)$$

$$(2) \quad 1 = 3 \times 1 + (20 - 3 \times 6) \times (-1)$$

$$1 = 20 \times (-1) + 3 \times 7$$

$$(1) \quad 1 = 20 \times -1 + (23 - 20 \times 1) \times 7$$

$$1 = 23 \times 7 + 20 \times (-8)$$

On a donc : $23 \times 7 + 20 \times (-8) = 1$

puis en multipliant par 15 : $23 \times 105 + 20 \times (-120) = 15$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $23x + 20y = 15$:

$$23x + 20y = 15 \text{ et } 23 \times 105 + 20 \times (-120) = 15$$

$$\text{donc, par soustraction : } 23(x - 105) + 20(y + 120) = 0$$

$$\text{donc } 23(x - 105) = 20(-120 - y). \quad (*)$$

Or, 23 et 20 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $23 \mid -120 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-120 - y = 23k$

et alors, d'après (*): $x - 105 = 20k$.

• Réciproquement, si $x = 105 + 20k$ et $y = -120 - 23k$ alors :

$$23x + 20y = 23(105 + 20k) + 20(-120 - 23k) = \dots \text{ (à faire)} = 15.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $69x + 60y = 45$ sont les couples $(105 + 20k, -120 - 23k)$, où k entier relatif.

Exercice n°94 : résoudre l'équation diophantienne $34x + 24y = 43$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 34 et 24 :

$$(1) \quad 34 = 24 \times 1 + 10$$

$$(2) \quad 24 = 10 \times 2 + 4$$

$$(3) \quad 10 = 4 \times 2 + 2$$

$$(4) \quad 4 = 2 \times 2 + 0$$

donc $\text{PGCD}(34, 24) = 2$.

• $43 = 2 \times 21 + 1$ donc 2 ne divise pas 43

donc l'équation diophantienne $34x + 24y = 43$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°95 : résoudre l'équation diophantienne $29x + 15y = 59$.

CORRECTION

- Algorithme d'Euclide pour 29 et 15 :

$$(1) \quad 29 = 15 \times 1 + 14$$

$$(2) \quad 15 = 14 \times 1 + 1$$

$$(3) \quad 14 = 1 \times 14 + 0$$

donc $\text{PGCD}(29, 15) = 1$.

- Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est (1, 2).

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 29 et 15) et en multipliant par 59, on aurait trouvé la solution particulière (-59, 118).

- Si x et y sont solutions de l'équation $29x + 15y = 59$:

$$29x + 15y = 59 \text{ et } 29 \times 1 + 15 \times 2 = 59$$

$$\text{donc, par soustraction : } 29(x - 1) + 15(y - 2) = 0$$

$$\text{donc } 29(x - 1) = 15(2 - y). \quad (*)$$

Or, 29 et 15 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $29 \mid 2 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $2 - y = 29k$

et alors, d'après (*): $x - 1 = 15k$.

- Réciproquement, si $x = 1 + 15k$ et $y = 2 - 29k$ alors :

$$29x + 15y = 29(1 + 15k) + 15(2 - 29k) = \dots \text{ (à faire) } = 59.$$

- Conclusion : les solutions de l'équation $29x + 15y = 59$ sont les couples $(1 + 15k, 2 - 29k)$, où k entier relatif.

Exercice n°96 : résoudre l'équation diophantienne $66x + 56y = 88$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 66 et 56 :

$$\begin{aligned}(1) \quad & 66 = 56 \times 1 + 10 \\(2) \quad & 56 = 10 \times 5 + 6 \\(3) \quad & 10 = 6 \times 1 + 4 \\(4) \quad & 6 = 4 \times 1 + 2 \\(5) \quad & 4 = 2 \times 2 + 0\end{aligned}$$

donc $\text{PGCD}(66, 56) = 2$.

En divisant par $\text{PGCD}(66, 56)$: $66x + 56y = 88 \Leftrightarrow 33x + 28y = 44$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 33 et 28 :

$$\begin{aligned}(1) \quad & 33 = 28 \times 1 + 5 \\(2) \quad & 28 = 5 \times 5 + 3 \\(3) \quad & 5 = 3 \times 1 + 2 \\(4) \quad & 3 = 2 \times 1 + 1 \\(5) \quad & 2 = 1 \times 2 + 0\end{aligned}$$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}(4) \quad & 1 = 3 \times 1 + 2 \times (-1) \\(3) \quad & 1 = 3 \times 1 + (5-3 \times 1) \times (-1) \\& 1 = 5 \times (-1) + 3 \times 2 \\(2) \quad & 1 = 5 \times (-1) + (28-5 \times 5) \times 2 \\& 1 = 28 \times 2 + 5 \times (-11) \\(1) \quad & 1 = 28 \times 2 + (33-28 \times 1) \times (-11) \\& 1 = 33 \times (-11) + 28 \times 13\end{aligned}$$

On a donc : $33 \times (-11) + 28 \times 13 = 1$

puis en multipliant par 44 : $33 \times (-484) + 28 \times 572 = 44$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $33x + 28y = 44$:

$$33x + 28y = 44 \text{ et } 33 \times (-484) + 28 \times 572 = 44$$

$$\text{donc, par soustraction : } 33(x + 484) + 28(y - 572) = 0$$

$$\text{donc } 33(x + 484) = 28(572 - y). \quad (*)$$

Or, 33 et 28 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $33 \mid 572 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $572 - y = 33k$

et alors, d'après (*): $x + 484 = 28k$.

• Réciproquement, si $x = -484 + 28k$ et $y = 572 - 33k$ alors :

$$33x + 28y = 33(-484 + 28k) + 28(572 - 33k) = \dots \text{ (à faire)} = 44.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $66x + 56y = 88$ sont les couples $(-484 + 28k, 572 - 33k)$, où k entier relatif.

Exercice n°97 : résoudre l'équation diophantienne $75x + 6y = 78$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 75 et 6 :

$$(1) \quad 75 = 6 \times 12 + 3$$

$$(2) \quad 6 = 3 \times 2 + 0$$

donc $\text{PGCD}(75, 6) = 3$.

En divisant par $\text{PGCD}(75, 6)$: $75x + 6y = 78 \Leftrightarrow 25x + 2y = 26$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 25 et 2 :

$$(1) \quad 25 = 2 \times 12 + 1$$

$$(2) \quad 2 = 1 \times 2 + 0$$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(1) \quad 1 = 25 \times 1 + 2 \times (-12)$$

Puis en multipliant par 26 : $25 \times 26 + 2 \times (-312) = 26$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $25x + 2y = 26$:

$$25x + 2y = 26 \text{ et } 25 \times 26 + 2 \times (-312) = 26$$

$$\text{donc, par soustraction : } 25(x - 26) + 2(y + 312) = 0$$

$$\text{donc } 25(x - 26) = 2(-312 - y). \quad (*)$$

Or, 25 et 2 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $25 \mid -312 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-312 - y = 25k$

et alors, d'après (*): $x - 26 = 2k$.

• Réciproquement, si $x = 26 + 2k$ et $y = -312 - 25k$ alors :

$$25x + 2y = 25(26 + 2k) + 2(-312 - 25k) = \dots \text{ (à faire) } = 26.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $75x + 6y = 78$ sont les couples $(26 + 2k, -312 - 25k)$, où k entier relatif.

Exercice n°98 : résoudre l'équation diophantienne $33x + 87y = 51$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 87 et 33 :

$$\begin{aligned}(1) \quad & 87 = 33 \times 2 + 21 \\(2) \quad & 33 = 21 \times 1 + 12 \\(3) \quad & 21 = 12 \times 1 + 9 \\(4) \quad & 12 = 9 \times 1 + 3 \\(5) \quad & 9 = 3 \times 3 + 0\end{aligned}$$

donc $\text{PGCD}(33, 87) = 3$.

En divisant par $\text{PGCD}(33, 87)$: $33x + 87y = 51 \Leftrightarrow 11x + 29y = 17$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 11 et 29 :

$$\begin{aligned}(1) \quad & 29 = 11 \times 2 + 7 \\(2) \quad & 11 = 7 \times 1 + 4 \\(3) \quad & 7 = 4 \times 1 + 3 \\(4) \quad & 4 = 3 \times 1 + 1 \\(5) \quad & 3 = 1 \times 3 + 0\end{aligned}$$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}(4) \quad & 1 = 4 \times 1 + 3 \times (-1) \\(3) \quad & 1 = 4 \times 1 + (7-4 \times 1) \times (-1) \\& 1 = 7 \times (-1) + 4 \times 2 \\(2) \quad & 1 = 7 \times (-1) + (11-7 \times 1) \times 2 \\& 1 = 11 \times 2 + 7 \times (-3) \\(1) \quad & 1 = 11 \times 2 + (29-11 \times 2) \times (-3) \\& 1 = 29 \times (-3) + 11 \times 8\end{aligned}$$

On a donc : $11 \times 8 + 29 \times (-3) = 1$

puis en multipliant par 17 : $11 \times 136 + 29 \times (-51) = 17$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $11x + 29y = 17$:

$$11x + 29y = 17 \text{ et } 11 \times 136 + 29 \times (-51) = 17$$

$$\text{donc, par soustraction : } 11(x - 136) + 29(y + 51) = 0$$

$$\text{donc } 11(x - 136) = 29(-51 - y). \quad (*)$$

Or, 11 et 29 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $11 \mid -51 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-51 - y = 11k$

et alors, d'après (*): $x - 136 = 29k$.

• Réciproquement, si $x = 136 + 29k$ et $y = -51 - 11k$ alors :

$$11x + 29y = 11(136 + 29k) + 29(-51 - 11k) = \dots \text{ (à faire) } = 17.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $33x + 87y = 51$ sont les couples $(136 + 29k, -51 - 11k)$, où k entier relatif.

Exercice n°99 : résoudre l'équation diophantienne $62x + 68y = 28$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 68 et 62 :

$$(1) \quad 68 = 62 \times 1 + 6$$

$$(2) \quad 62 = 6 \times 10 + 2$$

$$(3) \quad 6 = 2 \times 3 + 0$$

donc $\text{PGCD}(62, 68) = 2$.

En divisant par $\text{PGCD}(62, 68)$: $62x + 68y = 28 \Leftrightarrow 31x + 34y = 14$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 31 et 34 :

$$(1) \quad 34 = 31 \times 1 + 3$$

$$(2) \quad 31 = 3 \times 10 + 1$$

$$(3) \quad 3 = 1 \times 3 + 0$$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(2) \quad 1 = 31 \times 1 + 3 \times (-10)$$

$$(1) \quad 1 = 31 \times 1 + (34 - 31 \times 1) \times (-10)$$

$$1 = 34 \times (-10) + 31 \times 11$$

On a donc : $31 \times 11 + 34 \times (-10) = 1$

puis en multipliant par 14 : $31 \times 154 + 34 \times (-140) = 14$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $31x + 34y = 14$:

$$31x + 34y = 14 \text{ et } 31 \times 154 + 34 \times (-140) = 14$$

$$\text{donc, par soustraction : } 31(x - 154) + 34(y + 140) = 0$$

$$\text{donc } 31(x - 154) = 34(-140 - y). \quad (*)$$

Or, 31 et 34 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $31 \mid -140 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-140 - y = 31k$

et alors, d'après (*): $x - 154 = 34k$.

• Réciproquement, si $x = 154 + 34k$ et $y = -140 - 31k$ alors :

$$31x + 34y = 31(154 + 34k) + 34(-140 - 31k) = \dots \text{ (à faire) } = 14.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $62x + 68y = 28$ sont les couples $(154 + 34k, -140 - 31k)$, où k entier relatif.

Exercice n°100 : résoudre l'équation diophantienne $99x + 83y = 19$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 99 et 83 :

$$(1) \quad 99 = 83 \times 1 + 16$$

$$(2) \quad 83 = 16 \times 5 + 3$$

$$(3) \quad 16 = 3 \times 5 + 1$$

$$(4) \quad 3 = 1 \times 3 + 0$$

donc $\text{PGCD}(99, 83) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(3) \quad 1 = 16 \times 1 + 3 \times (-5)$$

$$(2) \quad 1 = 16 \times 1 + (83 - 16 \times 5) \times (-5)$$

$$1 = 83 \times (-5) + 16 \times 26$$

$$(1) \quad 1 = 83 \times -5 + (99 - 83 \times 1) \times 26$$

$$1 = 99 \times 26 + 83 \times (-31)$$

On a donc : $99 \times 26 + 83 \times (-31) = 1$

puis en multipliant par 19 : $99 \times 494 + 83 \times (-589) = 19$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $99x + 83y = 19$:

$$99x + 83y = 19 \text{ et } 99 \times 494 + 83 \times (-589) = 19$$

$$\text{donc, par soustraction : } 99(x - 494) + 83(y + 589) = 0$$

$$\text{donc } 99(x - 494) = 83(-589 - y). \quad (*)$$

Or, 99 et 83 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $99 \mid -589 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-589 - y = 99k$

et alors, d'après (*): $x - 494 = 83k$.

• Réciproquement, si $x = 494 + 83k$ et $y = -589 - 99k$ alors :

$$99x + 83y = 99(494 + 83k) + 83(-589 - 99k) = \dots \text{ (à faire) } = 19.$$

• Conclusion : les solutions de l'équation $99x + 83y = 19$ sont les couples $(494 + 83k, -589 - 99k)$, où k entier relatif.